Université de Mons-Hainaut
Service d'Analyse et Méthodologie Mathématiques

L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire

G. Noël, F. Pourbaix, Ph. Tilleuil

1997

Table des matières

0 Introduction **1**

0.1 L'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire 2

0.2 Les difficultés d'enseignement de l'algèbre linéaire 4

0.3 Le malentendu de l'algèbre linéaire 6

0.4 Les objectifs de notre recherche 7

0.5 Résultats de la recherche 9

I La géométrie de l'algèbre linéaire **11**

1 Analyse théorique **12**

1.1 La problématique 13

1.1.1 L'enseignement de la géométrie 14

1.1.2 Le problème de la représentation plane 15

1.1.3 Le problème de la méthode 17

1.1.4 La géométrie de l'algèbre linéaire 20

1.2 Les grands thèmes 21

1.2.1 Les prérequis 22

1.2.2 Les thèmes fondamentaux et les thèmes annexes 23

1.2.3 Thème I : Géométrie d'incidence de l'espace 24

1.2.4 Thème II : Géométrie vectorielle élémentaire 25

1.2.5 Thème III : Produit scalaire 27

1.2.6 Thème IV : Nombres complexes et rotations du plan 28

1.2.7 Thème V : Les rotations de l'espace 30

1.2.8 Thème VI : Volume, produit extérieur et déterminant 33

1.2.9 Thème VII : Systèmes d'équations linéaires 39

1.2.10 Thème VIII : Matrices et composition des transformations linéaires . 41
1.2.11 Conclusions 42
1.3 Relations entre les thèmes 44

2 Les séquences d'enseignement 45
2.1 La géométrie d'incidence de l'espace 47
2.1.1 Introduction 48
2.1.2 Prérequis 49
2.1.3 Fiche n° 1 : Incidence et parallélisme (1) 52
2.1.4 Fiche n° 2 : Incidence et parallélisme (2) 56
2.1.5 Fiche n° 3 : Incidence et parallélisme (3) 60
2.1.6 Synthèse 65
2.2 La géométrie vectorielle élémentaire 68
2.2.1 Introduction 69
2.2.2 Fiche n° 4 : Projections et coordonnées 71
2.2.3 Fiche n° 5 : Équations vectorielles d'une droite 77
2.2.4 Fiche n° 6 : Équations vectorielles d'un plan 80
2.2.5 Synthèse 83
2.3 Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires 86
2.3.1 Introduction 87
2.3.2 Fiche n° 7 : Point de percée d'une droite dans un plan 88
2.3.3 Fiche n° 8 : Équations cartésiennes d'un plan 92
2.3.4 Fiche n° 9 : Équations cartésiennes d'une droite 99
2.3.5 Fiche n° 10 : Projecteurs et équations cartésiennes 110
2.3.6 Fiche n° 11 : Formes linéaires (1) 116
2.3.7 Fiche n° 12 : Formes linéaires (2) 120
2.3.8 Synthèse 124
2.4 Le produit scalaire 126
2.4.1 Introduction 127
2.4.2 Fiche n° 13 : Le produit scalaire 128
2.4.3 Fiche n° 14 : Sphères et plans 138
2.4.4 Synthèse 148
2.5 Produit vectoriel, volume et déterminant 150

2.5.1 Introduction . . . 151
2.5.2 Fiche n° 15 : Produit vectoriel, volume et déterminant . . . 152
2.6 Les rotations de l'espace . . . 165
2.6.1 Introduction . . . 166
2.6.2 Fiche n° 16 : Les rotations cubiques . . . 169
2.6.3 Fiche n° 17 : La représentation matricielle des rotations . . . 180

II Applications 187

3 Un réseau cubique électrique ? 188
3.1 Introduction . . . 189
3.2 La géométrie des charges électriques . . . 192
3.3 Le champ créé par les deux premières couches . . . 195
3.4 Le champ créé par la couche n°2 . . . 199
3.5 Et le champ correspondant à la couche n°n ? . . . 203
3.6 Pourquoi pas une couche cubique ? . . . 206

4 Construire un cadran solaire 207
4.1 Introduction . . . 208
4.2 Où est le soleil ? . . . 211
4.3 Les cadrans solaires classiques . . . 212
4.4 Où est l'ombre ? . . . 213
4.4.1 Les cadrans équatoriaux . . . 214
4.4.2 Les cadrans horizontaux . . . 215

III Annexes 223

A Le programme `Reseau.exe` 224
A.1 Introduction . . . 225
A.2 La structure du programme . . . 226
A.3 Les menus . . . 227
A.3.1 Le menu Projet . . . 228
A.3.2 Le menu Transformation . . . 231

A.3.3 Le menu Représentation . . . 232
A.3.4 Le menu Couleurs . . . 237
A.4 Les icônes . . . 238
A.4.1 Les icônes de création . . . 239
A.4.2 L'icône de dénomination . . . 241
A.4.3 Les icônes d'exécution . . . 242

B Les sections de cube **243**
B.1 Introduction . . . 244
B.2 La méthode synthétique . . . 245
B.3 Une méthode basée sur le réseau cubique . . . 247
B.4 Une méthode vectorielle . . . 249
B.5 Une conclusion ? . . . 251

C Bibliographie commentée **252**
C.1 A.Kostrikin : Introduction à l'algèbre . . . 254
C.2 N.Kuiper : Linear Algebra and Geometry . . . 256
C.3 T.Banchoff, J.Wermer : Linear Algebra through Geometry . . . 258
C.4 F.Pham et H.Dillinger : Algèbre linéaire . . . 261
C.5 Paul R.Halmos : Finite-dimensional vector spaces . . . 262

D Le concept de vecteur **264**
D.1 Introduction . . . 265
D.2 Quelques présentations du concept de vecteur . . . 266
D.2.1 H.S.M.Coxeter 1961 . . . 267
D.2.2 N.Kuiper 1962 . . . 268
D.2.3 J.Dieudonné 1964 . . . 269
D.2.4 R.M.Hochtrasser 1965 . . . 270
D.2.5 G.Papy 1968 . . . 271
D.2.6 K.Borsuk 1969 . . . 272
D.2.7 S.Lang 1971 . . . 273
D.2.8 T.J.Fletcher 1972 . . . 274
D.2.9 T.Banchoff et J.Wermer 1992 . . . 275

D.3 Conclusion 276

Bibliographie **277**

Chapitre 0

Introduction

0.1 L'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire 2
0.2 Les difficultés d'enseignement de l'algèbre linéaire 4
0.3 Le malentendu de l'algèbre linéaire 6
0.4 Les objectifs de notre recherche 7
0.5 Résultats de la recherche 9

0.1. L'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire

> *En général, on ne se rend pas compte de façon claire que, dans l'enseignement secondaire (mis à part les rudiments du calcul infinitésimal), on n'enseigne rien d'autre que de l'algèbre linéaire.*
>
> *J. Dieudonné*

L'importance de l'algèbre linéaire et de ses applications est très largement reconnue. Ainsi, dans son *Cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, le CREM (voir [4], paragraphes 7.1.3 et 7.1.5) écrit :

> « *L'algèbre linéaire, ..., comporte une multitude d'applications dans les domaines les plus variés. C'est pourquoi elle est un des chapitres les plus importants (l'autre est l'analyse) dans la plupart des cours universitaires de mathématiques générales.* »

et plus loin :

> « *Parmi les théories algébriques, c'est l'algèbre linéaire qui possède les applications les plus nombreuses et les plus variées. Ceci est dû en partie au fait que la proportionnalité et, ce qui mathématiquement la généralise (la linéarité), sont parmi les choses les plus aisément concevables par l'esprit humain, même s'il est vrai qu'elles donnent du fil à retordre aux écoliers. Ceci fait que beaucoup de situations qui, prises dans toute leur complexité, ne sont pas linéaires, sont néanmoins, par raison de commodité, représentées par un modèle mathématique linéaire, choisi le moins inadéquat possible. L'algèbre linéaire sert à résoudre des problèmes de mécanique des vibrations, de réseaux électriques, d'évolution de population, de systèmes chimiques, économiques, sociaux, etc.* »

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que le phénomène linéaire soit présent dans le cours de mathématique dès la fin de l'école primaire. Il suffit de rappeler les questions liées à la proportionnalité directe : pourcentages, intérêts, changements d'unités, dessins à l'échelle, emploi d'opérateurs fractionnaires, etc. Tout au long du premier et du deuxième degré de l'enseignement secondaire, le phénomène linéaire continue d'être présent en force. On rencontre de nouveau la proportionnalité, mais aussi

1. au premier degré (voir [1] :
   - les repérages sur une droite, dans un plan ou dans l'espace. Ces activités constituent les premiers contacts de l'élève avec la géométrie analytique laquelle peut être considérée comme l'application de l'algèbre linéaire (et multilinéaire) à la géométrie,

- la moyenne d'un ensemble de données numériques,
- des problèmes conduisant à des équations du type $ax + b = c$,
- des applications diverses telles que la relation espace-temps pour un mobile, le montant d'une facture de téléphone ou le prix d'une course en taxi,
- la mise en évidence et la distributivité,
- les translations, symétries et rotations et leurs invariants fondamentaux, notamment l'alignement des points,
- les projections parallèles et les agrandissements et réduction d'une figure plane, les reproductions à l'échelle,
- la perspective cavalière et ses invariants : parallélisme de droites et rapports de segments de droites parallèles,
- les effets sur les coordonnées de transformations telles que translations, symétries centrales ou orthogonales, rotations.

2. au deuxième degré (voir [2] et [3]) :
   - le théorème de Thalès et les triangles semblables, en particulier homothétiques,
   - les coordonnées du milieu d'un segment,la construction de la quatrième proportionnelle et le partage d'un segment en n parties égales,
   - les proportions,
   - les translations, rotations et symétries,
   - l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire, les composantes d'un vecteur,
   - la géométrie analytique plane de la droite,
   - l'analyse et la construction de graphiques de fonctions du type $x \mapsto ax + b$,
   - les fonctions, équations et inéquations du premier degré,
   - l'équation cartésienne d'une droite, les systèmes de deux équations à deux inconnues,
   - les problèmes conduisant à des équations du premier degré,
   - la liaison entre les transformations géométriques et les graphiques des fonctions $f(x)$, $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$, $f(kx)$,
   - la moyenne d'un tableau de nombres.

Si l'enseignement de l'algèbre linéaire durant les quatre premières années de l'enseignement secondaire peut raisonnablement procéder par accumulation de résultats, il vient un moment où une mise en ordre s'impose, où une synthèse doit être réalisée. Ce n'est qu'à ce prix que la puissance de l'outil introduit sera maîtrisée par les élèves et qu'il sera possible de le rendre pleinement opérationnel.

0.2. Les difficultés d'enseignement de l'algèbre linéaire

Dans les programmes mis en application à partir de 1968, la synthèse reposait sur une explicitation de la structure d'espace vectoriel présentée dès la quatrième année. Après quelques années d'application, on s'est rendu compte que l'introduction de cette structure était trop rapide, et que les élèves ne disposaient pas en temps voulu de la maturité nécessaire. De plus, loin de jouer le rôle d'une synthèse, l'étude de la structure d'espace vectoriel était souvent réalisée pour elle-même sans liaison suffisante avec les applications, qu'il s'agisse des applications extra-mathématiques — généralement inaccessibles aux élèves du secondaire — mentionnées dans la citation du CREM ou d'applications beaucoup plus simples, notamment à la géométrie de l'enseignement secondaire.

Des recherches menées en France pour déterminer la nature des difficultés d'enseignement de l'algèbre linéaire ont confirmé, peut-être même de façon amplifiée, les observations effectuées dans l'enseignement secondaire belge. Mentionnons en particulier les travaux de J.-L. Dorier (voir [23], [24], [25]) et K. Pavlopoulou (voir [40], [41]). Ces auteurs ont analysé l'enseignement d'algèbre linéaire tel qu'il se donne en France dans une première année d'études scientifiques de niveau universitaire, contexte dans lequel la structure vectorielle est de façon standard enseignée pour elle-même. Leurs remarques montrent à suffisance les défauts de la méthodologie adoptée.

> « *Notre analyse préalable de la nature des concepts d'algèbre linéaire [...] nous laisse supposer que leur aspect unificateur et simplificateur, ainsi que l'absence de problème « simple » permettant de justifier à lui seul l'introduction de concepts qui n'ont de réelle justification que dans leur emploi répété, conduisent à un enseignement dichotomique.*

> *D'un côté, on propose des problèmes qui soulèvent de « vraies » questions, mais pour lesquels l'algèbre linéaire n'est qu'une façon plus générale, mais pas indispensable, de résolution. Ce nouveau point de vue apporte éventuellement une simplification mais qui n'est vraiment effective que, d'une part, si on maîtrise bien les concepts d'algèbre linéaire et d'autre part si on a à résoudre plusieurs problèmes du même type. En situation d'enseignement, le risque est grand que la résolution du problème par la méthode utilisant l'algèbre linéaire ne soit qu'un effet du contrat global : «on est en cours d'algèbre linéaire, donc il faut s'en servir», ou bien que les questions qui découpent la tâche obligent à cette démarche. Il n'est par contre pas certain que libre de son choix, l'étudiant privilégie la méthode issue de l'algèbre linéaire, on a d'ailleurs observé quelques «dérapages» dans ce sens. Par ailleurs la résolution de ce type de problème nécessite souvent des prérequis liés à des techniques algébriques spécifiques au domaine en jeu (calcul polynomial, calcul intégral ou dérivation, etc). Les difficultés que ce phénomène engendre peuvent dans certains cas prendre des proportions telles que l'enjeu se trouve entièrement déplacé, et que les questions d'algèbre linéaire n'apparaissent plus que comme secondaires.*
>
> *D'un autre côté, le deuxième type de problèmes proposés en algèbre linéaire se situe dans un cadre entièrement formel sans référence extérieure. Les espaces utilisés sont généraux, on peut dire que les questions sont de vraies questions d'algèbre linéaire, mais que leur intérêt hors de ce cadre n'est en général pas visible dans le problème, ce qui peut poser un problème de motivation. L'enseignement visé ici est celui de « techniques-objets », les difficultés qu'il soulève sont liées à l'utilisation du formalisme du langage ensembliste, dont on sait que les étudiants ont beaucoup de mal à l'adopter, surtout en l'absence de point d'appui sur un cadre de référence plus complet. »*

Ainsi, l'algèbre linéaire de l'enseignement secondaire belge ou du début de l'enseignement universitaire français serait soit inutile, soit trop générale. Dans les deux cas, elle ne serait pas motivante. Mais de quelle algèbre linéaire s'agit-il ?

0.3. Le malentendu de l'algèbre linéaire

Depuis les années soixante, une habitude malencontreuse s'est instaurée consistant à assimiler « algèbre linéaire » à « étude formelle de la structure d'espace vectoriel », ce qui n'en est qu'un point particulier, et pas le plus intéressant. C'est bien à l'algèbre linéaire comprise dans ce sens restreint que s'appliquent la plupart des critiques qui ont été mentionnées ci-dessus.

Cette erreur de vocabulaire et cette approche de la structure d'espace vectoriel qui n'en assurait pas le sens par une liaison correcte avec d'une part les applications, d'autre part les concepts géométriques élémentaires, a finalement eu pour conséquence non seulement le rejet de l'étude formelle de la structure d'espace vectoriel, mais aussi de ce concept lui-même et la plus grande partie de ceux qui y sont associés. En termes familiers, nous dirions qu'on a « jeté le bébé avec l'eau du bain ».

C'est ainsi qu'on a vu ces dernières années, l'importance de l'algèbre linéaire, au sens large, diminuer singulièrement dans le troisième degré de l'enseignement secondaire, alors qu'il n'est pas excessif de considérer que la grande majorité des jeunes gens qui abordent des études supérieures techniques, scientifiques, économiques ou même de sciences humaines seront confrontés à des situations relevant de cette discipline. Un effort particulier doit être réalisé en vue de leur assurer une préparation adéquate. L'enseignement de l'algèbre linéaire doit être complètement repensé. C'est à cette entreprise que notre travail doit apporter une contribution.

0.4. Les objectifs de notre recherche

Nous venons d'indiquer ce que notre travail n'est pas : l'algèbre dont il est question dans la suite **n'est pas** l'étude formelle de la structure d'espace vectoriel ni des applications linéaires. Même si nous estimons que cette dernière notion — qui n'est qu'une généralisation directe de la proportionnalité — constitue le point essentiel de tout cours d'algèbre linéaire, nous pensons contre-indiqué de l'aborder sans une préparation approfondie qui permette de la mettre en valeur.

Notre but a été de mettre au point des séquences d'enseignement du niveau du troisième degré de l'enseignement secondaire, et qui mènent progressivement les élèves des notions élémentaires de géométrie aux concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire.

Nous nous appuyons sur deux principes.

1. **En ce qui concerne le contenu : ne pas enseigner l'algèbre linéaire pour elle-même.**

   Nous ne voulons pas écrire un cours d'algèbre linéaire, mais rencontrer ses concepts et ses techniques le plus souvent possible, et cela de façon souvent informelle, à l'occasion d'activités diverses.

   Le cours de géométrie de l'espace se prête particulièrement bien à la réalisation d'un enseignement intégré d'algèbre et de géométrie. L'algèbre linéaire, au sens large, a mis en évidence le caractère linéaire, ou multilinéaire, de ces notions tout à fait fondamentales dans la géométrie d'Euclide que sont : le point, la droite, le plan, l'incidence, le parallélisme, la perpendicularité, la mesure des distances, des angles, des volumes, ...Depuis plus de 150 ans, la géométrie d'Euclide s'exprime largement dans le langage de l'algèbre linéaire.

   L'algèbre linéaire a aussi permis d'ouvrir la géométrie : pour l'essentiel, c'est même ce qui en a organisé le développement en rendant accessible par exemple les espaces de dimension supérieure à 3.

Coordonner algèbre linéaire et géométrie permet de montrer la puissance en géométrie de l'outil algébrique, mais aussi de faire bénéficier l'algèbre linéaire de l'intuition acquise en géométrie. C'est ce que Hans Freudenthal (voir [28]) appelle algébriser la géométrie et géométriser l'algèbre. Cette coordination de l'algèbre linéaire et de la géométrie constitue la première partie (et la plus importante) de notre travail, intitulée *La géométrie de l'algèbre linéaire*. Nous nous y efforçons de mettre en évidence systématiquement les trois éclairages de la plupart des activités de géométrie de l'espace, le but étant de permettre à l'élève qui doit résoudre un problème de choisir celui des points de vue synthétique, vectoriel ou analytique qui se révèle le plus adéquat. Actuellement, algèbre et géométrie semblent parler de l'espace de manières différentes, l'une à l'aide de figures, d'images et de démonstrations souvent élégantes, l'autre à partir de calculs et de structures formelles. Et ces deux approches des mêmes problèmes semblent très éloignées l'une de l'autre. L'élève n'apprend pas à choisir l'outil qui lui permet de résoudre le problème qui lui est posé.

La limitation de la dimension à 3 se révèle rapidement un inconvénient important, qui empêche de percevoir la portée véritable des concepts d'algèbre linéaire. D'autres activités doivent donc également être proposées aux élèves. Elles peuvent être issues d'autres domaines mathématiques (analyse, probabilités) mais aussi d'autres disciplines. Il est en particulier souhaitable de présenter également des activités ayant un caractère interdisciplinaire. Deux d'entre elles constituent la seconde partie de notre travail.

2. **En ce qui concerne les activités : mettre en évidence des analogies et laisser mûrir les notions**

   Dès que l'élève a acquis les principes de géométrie vectorielle, synthétique ou analytique, ce devrait être à lui de choisir librement la m éthode de résolution des problèmes qui lui sont soumis. Mais c'est à l'enseignant de faire ressortir les analogies et les différences entre les traitements possibles. Le but n'est pas tant de résoudre un problème que de réfléchir sur ce qui fait que le problème peut être résolu. Les traits fondamentaux, tant géométriques qu'algébriques doivent ainsi apparaître et réapparaître dans des circonstances différentes.

   Les applications non géométriques, relevant de contextes variés, doivent également permettre de mettre en évidence des analogies conduisant à des économies de pensée. Ce sont les faits structurels de l'algèbre linéaire qui doivent être mis en place en souplesse, et sans formalisation. On attendra donc que l'élève ait de lui-même saisi la signification profonde des analogies remarquées avant de les exploiter en vue d'une quelconque formalisation. Cette dernière pourrait même ne jamais avoir lieu dans le cadre de l'enseignement secondaire, mais les activités menées à ce niveau la rendrait possible et fructueuse dans l'enseignement supérieur.

0.5. Résultats de la recherche

Le chapitre 1 du présent travail propose un schéma d'organisation de l'enseignement de l'algèbre linéaire selon 10 grands thèmes théoriques.

Pour opérationnaliser ce schéma, une période de plusieurs années de travail serait nécessaire. Nous avons donc dû nous limiter à en traiter seulement une partie.

Les fiches que nous présentons au chapitre 2 sont ainsi structurées de façon différente et regroupées en sections qui ne correspondent pas exactement aux thèmes du chapitre 1. Le tableau suivant indique la concordance entre thèmes et sections.

Thème	Section	Titre
I	A	Géométrie d'incidence
II	B	Géométrie vectorielle
V	F	Rotations de l'espace
VI	E	Produit vectoriel, volume et déterminant
VII	C	Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires
VIII	F	Rotations de l'espace
IX	–	
X	–	

On notera en particulier que les thèmes V et VIII de l'étude théorique sont abordés ensemble dans les fiches de la section F (sans intervention des quaternions). L'étude du produit extérieur prévue au thème VI a été ramenée à celle du produit vectoriel dans les fiches de la section E.

Telles qu'elles sont, les fiches sont plus destinées au professeur qu'aux élèves. Elles proposent une construction inductive de la théorie à partir de problèmes, lesquels ne sont pas conçus pour être résolus par les élèves sans intervention de l'enseignant. Si une prolongation du projet avait été possible, la seconde année aurait été consacrée en partie à leur expérimentation dans des classes.

Les chapitres 3 et 4 ouvrent une porte vers des activités interdisciplinaires en proposant des applications peu classiques : le calcul du champ électrique créé par des charges ponctuelles situées aux sommets d'un réseau cubique et la construction d'un cadran solaire.

Afin de faciliter la visualisation de situations sur un réseau cubique préconisée dans les premières fiches, nous avons réalisé un didacticiel intitulé « Reseau.exe » qui est joint au présent fascicule et dont les annexes 1 et 2 proposent d'une part un mode d'emploi, d'autre part un exemple d'utilisation.

Les annexes 3 et 4 présentent un inventaire succinct des principaux textes classiques consacrés à l'algèbre linéaire et à la notion de vecteur.

Le travail est complété par une bande vidéo d'environ 10 minutes qui illustre les fiches de la section A.

Enfin, signalons que ce travail a fait l'objet de trois communications dans le cadre du Séminaire de Didactique des Mathématiques organisé à l'Université de Mons-Hainaut en février et mars 1997.

Première partie

La géométrie de l'algèbre linéaire

Chapitre 1

Analyse théorique

1.1 La problématique 13
1.1.1 L'enseignement de la géométrie 14
1.1.2 Le problème de la représentation plane 15
1.1.3 Le problème de la méthode 17
1.1.4 La géométrie de l'algèbre linéaire 20
1.2 Les grands thèmes 21
1.2.1 Les prérequis 22
1.2.2 Les thèmes fondamentaux et les thèmes annexes 23
1.2.3 Thème I : Géométrie d'incidence de l'espace 24
1.2.4 Thème II : Géométrie vectorielle élémentaire 25
1.2.5 Thème III : Produit scalaire 27
1.2.6 Thème IV : Nombres complexes et rotations du plan 28
1.2.7 Thème V : Les rotations de l'espace 30
1.2.8 Thème VI : Volume, produit extérieur et déterminant 33
1.2.9 Thème VII : Systèmes d'équations linéaires 39
1.2.10 Thème VIII : Matrices et composition des transformations linéaires . 41
1.2.11 Conclusions 42
1.3 Relations entre les thèmes 44

1.1. La problématique

Cette introduction relève quelques uns des problèmes rencontrés par l'enseignement de la géométrie dans l'espace, et plus particulièrement dans ses relations avec l'enseignement de l'algèbre linéaire.

1.1.1 L'enseignement de la géométrie

Les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie sont l'objet d'un rapport récent de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM ou ICMI).

> *Geometry, considered as a tool for understanding, describing and interacting with the space in which we live, is perhaps the most intuitive, concrete and reality-linked part of mathematics. On the other hand geometry, as a discipline, rests on an extensive formalization process, which has been carried out for over 2000 years at increasing levels of rigour, abstraction and generality . . .*
>
> *Among mathematicians and mathematics educators there is a widespread agreement that, due to the manifold aspects of geometry, the teaching of geometry should start at an early age, and continue in appropriate forms throughout the whole mathematics curriculum. However, as soon as one tries to enter into details, opinions diverge on how to accomplish the task. There have been in the past (and there persist even now) strong disagreements about the aims, contents and methods for the teaching of geometry at various levels, from primary school to university.*
>
> *Perhaps one of the main reasons for this situation is that geometry has so many aspects, and as a consequence there has not yet been found — and perhaps there does not exist at all — a simple, clean, linear "hierarchical" path from the first beginnings to the more advanced achievements of geometry. Unlike what happens in arithmetic and algebra, even basic concepts in geometry, such as the notions of angle and distance, have to be reconsidered at different stages from different viewpoints.*
>
> ([5] pp. 345-346)

Mais si ces problèmes ne sont pas nouveaux, ils prennent depuis quelques années une urgence nouvelle, comme le signale le même document (p.346).

> *Thus the teaching of geometry is not at all an easy task. But instead of trying to face and overcome the obstacles arising in the teaching of geometry, actual school-practice in many countries has simply bypassed these obstacles, cutting out the more demanding parts, often without any replacement. For instance, three-dimensional geometry has almost disappeared or has been confined to a marginal role in the curricula in most countries.*

Quant à l'enseignement de la géométrie de l'espace, il possède ses difficultés propres qui ne sont pas sans interaction avec l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

1.1.2 Le problème de la représentation plane

Comme toute discipline mathématique, la géométrie de l'espace possède ses difficultés propres. Mais, d'une certaine manière, elle possède une difficulté de plus, liée à notre mode de vision. Cette difficulté supplémentaire, déjà analysée entre autres par R. Bkouche, (voir [12]), est celle de la représentation plane des objets de l'espace.

Il est bien difficile d'imaginer un cours de géométrie dans l'enseignement secondaire qui puisse ne pas recourir au dessin : à ce stade de l'apprentissage, une représentation aussi fidèle que possible de l'objet géométrique à étudier est manifestement indispensable .

Or, la feuille de papier étant un objet naturellement associé à l'idée de plan, le manque de fidélité de la représentation dessinée d'un objet géométrique plan ne résulte généralement que de l'épaisseur, inévitablement non nulle, des traits. Cette discordance étant reconnue, on peut considérer qu'il n'y a pas de problème de représentation fidèle des objets plans par le dessin. Mais, et toujours parce que la feuille de papier est plane, il y a un problème réel quant à la représentation « fidèle et plane » des objets à trois dimensions.

Ce problème est une difficulté première et incontournable dans le cours de géométrie de l'espace ([1]). On peut lui apporter deux types de solutions.

La première consiste à développer une « imagination de l'espace », c'est-à-dire à apprendre à se figurer consciemment l'espace tel qu'il est, et non pas tel qu'on le voit. Par exemple : des droites non coplanaires (ou gauches) doivent être présentes à l'esprit comme constituant un objet réel, alors que celui-ci n'est pas réductible à un objet plan. Ou des droites parallèles doivent être imaginées telles, alors qu'on les voit sécantes.

La seconde solution revient à décoder aussi explicitement que possible des modes de représentation plane des objets de l'espace, c'est-à-dire à apprendre à se figurer consciemment l'espace, soit tel qu'on le voit (perspective centrale), soit suivant d'autres règles élémentaires de représentation plane (perspective cavalière, projections orthogonales, etc). En un mot : il s'agit de dessiner l'espace tel qu'on sait bien qu'il n'est pas !

([1]) Si la découverte des règles de la perspective centrale (c'est-à-dire du dessin des objets de l'espace tels qu'ils sont vus), par les peintres italiens du Quattrocento a été si tardive, c'est que ces règles n'étaient pas évidentes ! Pourquoi ? Probablement parce que nous ne percevons pas consciemment que notre vision est plane, et que donc ce que nous voyons est déjà « pré-codé ». Dès lors, s'il s'agit d'énoncer les règles qui président à la reproduction fidèle de ce que nous voyons, il faut se regarder en train de voir, et analyser alors géométriquement l'ensemble du processus. En d'autres mots : il faut amener à portée de la conscience ce qui, de par sa nature, fonctionne inconsciemment.

Même dans les cas où le problème de représentation plane d'un objet spatial est résolu de façon satisfaisante, même dans les cas où on a eu recours à un modèle matériel à trois dimensions, la complexité de l'objet lui-même ne permet pas toujours de tirer de cette représentation ou de cette modélisation le bénéfice que l'on en espérait. Ainsi, des expériences réalisées en URSS ont montré qu'une amélioration de la perception spatiale n'est pas suffisante pour entraîner automatiquement la prise de conscience des raisonnements à effectuer (voir [29]). On peut dire que l'appréhension d'une situation spatiale est plus difficile que celle d'une situation plane.

La conjonction des difficultés mathématiques propres au sujet, des difficultés inhérentes à la représentation plane des objets de l'espace et des difficultés d'appréhension des situations spatiales pourrait avoir comme conséquence importante que les programmes de géométrie de l'espace soient moins ambitieux que ceux de géométrie plane, alors que la géométrie de l'espace, étant celle du monde où nous vivons, devrait être la plus étudiée et probablement la plus ambitieuse...Et en effet, l'enseignement, autant en géométrie synthétique qu'en géométrie analytique, dès qu'on en arrive à la dimension 3, se limite en général ([2]) à la seule étude des relations les plus élémentaires (incidences, parallélismes, orthogonalités pour les droites et les plans).

Il apparaît ainsi une disproportion assez manifeste avec le volume de connaissances dispensé dans le cours de géométrie plane. Il en résulte aussi un manque de possibilités d'enseignement en spirale, les sujets concernés paraissant trop difficiles. Un exemple typique est la faible place réservée à l'étude des transformations de l'espace, alors qu'elle devrait prolonger de manière essentielle l'étude des transformations du plan.

On donne ainsi l'image d'une géométrie « fermée », qui ne sait pas généraliser, qui n'a plus d'outils assez puissants pour dépasser les difficultés ...

([2]) Il n'en a pas toujours été ainsi. Par exemple, les programmes belges de 1955 comportaient des chapitres consacrés aux dièdres, trièdres, à divers polyèdres, à la sphère, ... sans parler de la géométrie descriptive.

1.1.3 Le problème de la méthode

La géométrie est certainement un des lieux privilégiés de l'apprentissage de l'activité mathématique pour les élèves du secondaire. Mais comment donner à ces élèves suffisamment de moyens d'être créatifs en géométrie de l'espace vu que, comme signalé ci-dessus, les difficultés y sont grandissantes, qu'il est nécessaire de relayer « l'imagination de l'espace », et que le dessin n'y suffit pas. Peut-on alors laisser l'élève s'enfermer dans une géométrie fermée et pauvre en résultats ?

Freudenthal nous rappelle opportunément que l'algèbre peut venir à notre secours :

> *From Descartes onwards, algebra was admitted into geometry though the honorific title of true geometry was still reserved to the Euclidean method. However the more geometry proved unable to compete with the greater fertility of algebra and analysis, the more it was neglected, and the more its weakness became evident, the more people were inclined to rely on the so-called analytic geometry. Hilbert's " Grundlagen der Geometrie " could not turn back this trend. On the contrary, it showed even more clearly what was lacking in Euclid and how hard it was to fill the gaps. Moreover, was not the final result of Hilbert's approach the coordinatization and algebraization of geometry ?*
>
> ([28] p. 420)

Dans sa brochure proposant des « standards », le *National Council of Teachers of Mathematics* (U.S.A.),(voir [6] p.161) esquisse un programme de « géométrie algébrique » :

> *In grades 9-12, the mathematics curriculum should include the study of the geometry of two and three dimensions from an algebraic point of view so that all students can*
>
> – *translate between synthetic and coordinate representations ;*
> – *deduce properties of figures using transformations and using coordinates ;*
> – *identify congruent and similar figures using transformations ;*
> – *analyze properties of Euclidean transformations and relate translations to vectors ;*
>
> *and so that, in addition, college-intending students can*
>
> – *deduce properties of figures using vectors ;*
> – *apply transformations, coordinates, and vectors in problem solving.*

L'introduction de méthodes algébriques en géométrie est donc inévitable, et cela dès l'étude de la géométrie plane. On se trouve alors confronté au problème du *choix de la méthode* de résolution d'un problème.

Dans le contexte de la géométrie synthétique plane, on distingue déjà la géométrie des figures et la géométrie des transformations. L'introduction d'un repère cartésien permet de ramener de nombreux problèmes à des résolutions d'équations. Le calcul vectoriel et le calcul barycentrique sont adaptés à certains problèmes particuliers. Une autre forme — extrêmement puissante, mais qui n'est d'habitude enseignée ni dans le secondaire, ni ailleurs — de ce que nous pourrions appeler un calcul algébrico-géométrique est disponible dès qu'ont été introduits les nombres complexes et leur interprétation géométrique.

Mais plus la résolution d'un problème est algébrique, plus elle risque de s'écarter de l'intuition géométrique. On peut ainsi rencontrer des démonstrations de résultats géométriques dont on se dit que « ce n'est plus de la géométrie ». C'est le cas de certaines applications du produit scalaire. C'est encore plus le cas des calculs basés sur les nombres complexes. Lors de l'étude de la géométrie plane, la transition du point de vue synthétique vers un point de vue algébrique doit s'effectuer sans brûler les étapes, en veillant à ce que l'élève ait présent à l'esprit le sens géométrique des calculs algébriques. Sans quoi, il ne sera pas en mesure de distinguer qu'un problème formulé uniquement en termes géométriques peut éventuellement être résolu par une méthode algébrique.

Les mêmes principes peuvent être appliqués à la géométrie de l'espace. Mais au troisième degré du secondaire, l'élève n'est plus tout à fait un débutant. Il a déjà rencontré en géométrie plane l'usage de méthodes algébriques. En particulier, il sait ce qu'est un système de coordonnées cartésiennes. Il n'est donc pas indispensable d'avoir rencontré beaucoup de concepts et de résultats de géométrie synthétique avant de traduire certaines situations en termes algébriques. On peut plutôt envisager un enseignement qui amène les élèves régulièrement en contact avec les divers points de vue, assurant ainsi la coordination de ces points de vue, et conservant un sens géométrique même aux calculs purement algébriques. C'est cette approche que nous avons esquissée dans l'introduction générale. Mettre en évidence systématiquement les trois éclairages, synthétique, vectoriel, analytique, de la plupart des activités de géométrie de l'espace, doit permettre à l'élève aux prises avec un problème de choisir celui de ces points de vue qui est le plus efficace. Il s'agit non pas de lui *enseigner une méthode de résolution* des problèmes de géométrie de l'espace, mais de lui en enseigner plusieurs, et surtout de lui *apprendre à en choisir une*.

Dans ce contexte, l'algèbre linéaire est un outil privilégié. Elle permet de traiter avec aisance certaines situations géométriques qui ne pourraient être étudiées qu'avec difficultés par les méthodes synthétiques. Il en est ainsi, par exemple, des transformations de l'espace.

Mais ce que nous avons appelé le « malentendu de l'algèbre linéaire » dans l'introduction générale a eu pour conséquence de priver le cours de géométrie de l'espace du bénéfice des méthodes d'algèbre linéaire. Dans l'état actuel des choses, il y a par conséquent un vide à combler entre l'enseignement de la géométrie de l'espace dans le secondaire et l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les écoles supérieures et les universités. D'autant plus que ce vide se traduit par une formidable perte de sens, et handicape ainsi sérieusement l'apprentissage de l'algèbre linéaire par ceux-là mêmes qui sont amenés à devoir s'en servir concrètement dans des contextes divers.

De telles difficultés doivent pouvoir se dissiper si on en revient aux sources mêmes de l'algèbre linéaire. Il existe en effet des chemins qui vont de la géométrie vers l'algèbre linéaire, sans réduire pour autant le cours de géométrie à une illustration desséchée des notions d'algèbre linéaire.

1.1.4 La géométrie de l'algèbre linéaire

La première partie de notre travail consiste en un exposé qui éclaire les difficultés propres à l'enseignement de la géométrie de l'espace et contribue à les résoudre par l'introduction de notions d'algèbre linéaire, qui facilite la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur en ce qui concerne l'apprentissage des modes de pensée particuliers de l'algèbre linéaire, et dissipe ainsi les malentendus signalés plus haut.

En ce sens, on y entendra parler sans arrêt de points, de droites, de plans, d'incidences, de parallélisme, de perpendicularité, de distances, d'angles, de surfaces, de volumes, de transformations, et des relations que tous ces objets entretiennent entre eux, mais on y entendra parler tout autant de la manière dont on amène tous ces objets à la portée du calcul, de la signification de ce calcul, et des avantages géométriques qu'on en retire.

Il y a enfin, au coeur de notre projet, la volonté de convaincre de la pertinence d'un enseignement de l'algèbre linéaire dans le secondaire, autant vis-à-vis de la géométrie que d'autres parties des mathématiques. Cela est notamment possible à travers la résolution de problèmes où l'algèbre linéaire est indispensable, ainsi que par la mise en évidence de la symbiose entre algèbre et géométrie.

De manière très succincte, parmi les problèmes qui semblent les plus pertinents, citons :

- l'étude géométrique des systèmes d'équations linéaires, c'est-à-dire la traduction géométrique de tous les résultats classiques concernant leur résolution ; il est remarquable que cette traduction aura comme source des généralisations appropriées des notions de surface et volume ;
- l'étude géométrique des rotations de l'espace, en particulier la question de la composition de ces rotations ;
- l'étude géométrique des changements linéaires de variables, et de leur composition, en terme d'un « dictionnaire matriciel », et en prolongement entr'autres des deux problèmes précédents.

Tels quels, ces problèmes ne signifient pas encore grand chose, ou au contraire peut-être ... trop de choses. C'est pour cela que nous fournissons dans la suite une première description, plus détaillée, des grands thèmes qui devraient traverser « la géométrie de l'algèbre linéaire ». Certains de ces thèmes seront traités au chapitre 2 à l'aide d'une ou plusieurs fiches constituant autant de séquences d'enseignement.

1.2. Les grands thèmes

Les trois grands axes de notre coordination algèbre linéaire-géométrie, tels qu'ils ont été sommairement décrits à la fin de la section précédente, vont être abordés dans la suite à travers huit thèmes fondamentaux, fortement reliés entre eux, notés I à VIII, et auxquels pourraient s'ajouter deux thèmes annexes, IX et X.

1.2.1 Les prérequis

La mise en évidence de l'aspect géométrique de l'algèbre linéaire s'organise sur base de certains prérequis, qui ont en général fait l'objet d'un enseignement systématique dans le second degré de l'enseignement secondaire.

Ces prérequis peuvent être regroupés sommairement en quatre rubriques.

Les systèmes d'équations linéaires élémentaires

L'élève aura rencontré différentes situations, géométriques ou autres, qui débouchent sur un système d'équations du premier degré à deux, trois ou encore plus d'inconnues. Il s'agit en règle générale de systèmes à coefficients numériques, d'où la qualification d'« élémentaires ». L'élève sera en mesure de résoudre de tels systèmes, et d'interpréter la solution obtenue dans le contexte du problème considéré.

La géométrie affine plane

L'élève aura une connaissance suffisante des résultats de base de la géométrie affine du plan (propriétés d'incidence et de parallélisme, configurations géométriques élémentaires et en particulier le théorème de Thalès, transformations, etc. ...).

Il aura effectué un premier apprentissage des notions de base (positions relatives, incidences, parallélismes) de la géométrie dans l'espace. Néanmoins le **THÈME I** reprendra ces notions et ces résultats dans un contexte approprié à leur traduction algébrique ultérieure.

Une première approche de la notion de vecteur dans le plan, si elle n'est évidemment pas nuisible, n'est pas indispensable pour la suite, comme on s'en rendra compte dans le **THÈME II**. Par contre, une familiarisation avec l'utilisation des coordonnées pour résoudre des problèmes géométriques élémentaires dans le plan semble nécessaire.

La géométrie euclidienne

L'élève aura une connaissance suffisante des résultats de base de la géométrie euclidienne du plan (isométries, théorème de Pythagore, trigonométrie du triangle quelconque).

En conséquence de ce qui a été signalé ci-dessus à propos de la notion de vecteur, le produit scalaire ne doit pas avoir été rencontré.

L'algèbre du second degré

L'élève aura une connaissance raisonnée du calcul des radicaux du second ordre, des propriétés de l'équation autant que de la fonction du second degré.

1.2.2 Les thèmes fondamentaux et les thèmes annexes

Le coeur de la partie " La géométrie de l'algèbre linéaire " est constitué par huit grands thèmes :

I : Géométrie d'incidence de l'espace
II : Géométrie vectorielle élémentaire
III : Produit scalaire
IV : Nombres complexes et rotations du plan
V : Rotations de l'espace
VI : Volume, produit extérieur et déterminant
VII : Systèmes d'équations linéaires géométriques
VIII : Matrices et composition des transformations

Il s'y greffe deux thèmes annexes :

IX : Géométrie de la sphère
X : Géométrie projective

La suite est consacrée à une description un peu plus détaillée de ces divers thèmes, pris l'un après l'autre. Cette description n'est pas exhaustive : on s'y est limité à mettre en valeur certaines constructions et certains résultats qui reflètent mieux que d'autres les orientations caractéristiques du projet.

Les thèmes étant reliés les uns aux autres par un grand nombre de relations, un diagramme résumant leur organisation logique est fourni à la page 44.

1.2.3 Thème I : Géométrie d'incidence de l'espace

Notre objectif est de rappeler les résultats élémentaires de géométrie affine de l'espace (caractérisation de points, droites, plans, incidences, parallélismes, notions de perpendicularité). Le problème des ombres au soleil ou des projections parallèles fournit l'occasion de mettre cet ensemble de résultats en situation.

Mais ce problème n'est pas traité de manière tout à fait classique.

On propose une méthode simple de représentation des objets de l'espace qui permet d'installer une intuition réelle des propriétés et de suggérer des solutions. Cette méthode consiste à construire et étudier la figure associée au problème dans un réseau cubique « bien adapté ».

La présence de ce réseau cubique permet de mieux visualiser la position relative des objets (points, droites, plans) étudiés. En particulier, les plans et les droites se prolongent plus naturellement, les faces du réseau servent de support aux constructions, et des méthodes de résolution sont suggérées.

Un exemple simple est celui du point de percée dans une face d'un cube d'une droite définie par deux points situés dans deux autres faces de ce cube : la solution habituelle équivaut à l'usage de coordonnées cubiques.

Il est bien clair que le seul usage de réseaux cubiques ne permet pas de résoudre simplement tous les problèmes élémentaires de géométrie de l'espace. La géométrie de la molécule de méthane est un exemple simple de problème non-cubique. Mais la technique cubique se transpose sans grand mal : on sait, en effet, quel rôle privilégié est dévolu à l'orthogonalité dans la géométrie du tétraèdre régulier. C'est à travers l'orthogonalité que la technique cubique se prolonge.

De plus, on observe assez facilement que même des réseaux non-orthogonaux se manipulent sans difficulté supplémentaire notable, et présentent les mêmes avantages.

Le recours à des réseaux cubiques, et la place réservée à l'orthogonalité permettent de préparer la mise en place de la notion de coordonnées, et de relier ainsi le plus tôt possible l'approche géométrique à l'approche algébrique.

En ce sens, le réseau cubique peut être assimilé à une structure visuelle géométrique au sens de Van Hiele (voir [49]), mais appropriée à la géométrie dans l'espace, et préalable à d'autres formes de représentations, plus algébriques.

1.2.4 Thème II : Géométrie vectorielle élémentaire

On dit qu'une variable y dépend linéairement d'une variable x s'il existe un nombre réel a tel que $y = a \cdot x$. Plus généralement, une variable y dépend linéairement des variables x_1, x_2, …, x_n, s'il existe des nombres réels a_1, a_2, …, a_n, tels que

$$y = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n$$

Comme signalé dans l'introduction, un nombre suffisant de phénomènes linéaires ont déjà été rencontrés et étudiés dans les enseignements de mathématiques des années précédentes. Un des objectifs du cours d'algèbre linéaire est d'organiser maintenant tous ces résultats en les unifiant. Cette organisation s'entame avec la découverte du calcul vectoriel, et l'étude des premières incarnations géométriques de la notion de vecteur.

Partant de cette idée fondamentale de linéarité, un vecteur est (provisoirement) défini comme n'importe quel objet mathématique porteur ([3]) d'un calcul linéaire, de telle sorte qu'attribuer à un objet mathématique le statut de vecteur signifie : expliciter ses comportements caractéristiques en termes de linéarité.

Il est classique d'attribuer ce statut à trois types d'objets.

1. Le passage aux coordonnées est une clé essentielle pour introduire les différentes incarnations proprement géométriques de la notion de vecteur et, de cette façon, permettre de parler de ce calcul linéaire.

   Dans un système de coordonnées quelconques du plan ou de l'espace, d'origine fixée en un point O, les coordonnées de deux points A et B, dès qu'elles s'additionnent, déterminent ainsi un nouveau point C. Cette addition formelle donne naissance à une figure géométrique remarquable : le parallélogramme $OACB$.

   D'autre part, l'ensemble de tous les multiples des coordonnées d'un seul point $A \neq O$ coïncide avec l'ensemble des coordonnées des points de la droite AO.

   Ces résultats justifient que, un système de coordonnées étant fixé, **le statut de vecteur soit attribué à tout triplet de nombres réels**, considéré comme coordonnées d'un point de l'espace. On note $\mathbb{R}^3$ l'espace de ces vecteurs.
2. Dans la construction précédente, les interprétations géométriques des deux opérations constitutives d'une relation linéaire, à savoir l'addition et la multiplication par un nombre réel, sont en fait indépendantes du choix d'un système de coordonnées.

([3]) Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que le mot vecteur provient de la racine latine *vec-* signifiant transporter. On parle ainsi en biologie d'un organisme vecteur du germe d'une maladie et dans le domaine militaire d'un missile vecteur d'une charge nucléaire. Le mot est apparu en astronomie dans la locution rayon vecteur (droite censée porter une planète dans son mouvement autour du soleil). Il est passé en géométrie dans le cadre de l'usage des coordonnées polaires. On consultera à ce sujet la notice du mot *vecteur* dans [7]

Il est donc normal que l'**on attribue aussi le statut de vecteur à tout point de l'espace**. L'addition de tels vecteurs est associée à la configuration du parallélogramme, et la multiplication par un nombre réel est associé à une homothétie de centre O.

3. Quel que soit le système de coordonnées considéré, une translation de l'espace ne se décrit pas par une ou plusieurs relations linéaires. Mais il est néanmoins tout à fait justifié de considérer la composition des translations ainsi que la multiplication des translations par un nombre réel, comme donnant lieu à un calcul linéaire.

   Ces résultats justifient que l'**on attribue encore le statut de vecteur à toute translation** de l'espace.

Les correspondances décrites ci-dessus font référence à des isomorphismes. On rencontre ainsi cette idée fondamentale que des objets géométriques *a priori* différents peuvent être des incarnations d'une même notion, celle de vecteur, qui rend compte de manière unifiée de leurs caractéristiques essentielles.

Ultérieurement, un nouvel isomorphisme apparaît quand on attribue le statut de vecteur aux bipoints de l'espace pourvu qu'on identifie les bipoints équipollents, c'est-à-dire images les uns des autres par translations.

Les exemples précédents, concernant les aspects géométriques de la notion de vecteur, sont classiques et se retrouvent dans tous les apprentissages de l'algèbre linéaire. Mais d'autres, plus originaux, pourraient être abordés dans les thèmes ultérieurs :

- le bivecteur directeur, dans le THÈME VI,
- les solutions d'un système d'équations linéaires, dans le THÈME VII,
- les transformations linéaires dans le THÈME VIII, en prolongement de l'étude de l'espace des équations linéaires.

Avec une telle collection d'exemples, tous les phénomènes linéaires étudiés dans les cours de mathématiques des années précédentes auraient été rencontrés, unifiés, et substantiellement généralisés.

De plus, dès la construction des premiers exemples et des premiers concepts, la démarche devrait être inductive.

En résumé, ce thème propose une construction inductive du calcul vectoriel, qui s'arrête juste avant l'apparition de la structure d'espace vectoriel. Cette construction prend comme point de départ la géométrisation de la notion algébrique de phénomène linéaire. Elle explicite les isomorphismes entre les différentes incarnations géométriques de la notion de vecteur, pour faire percevoir le caractère unificateur de cette notion. Cela fait, les éléments fondamentaux de la géométrie de l'espace, tels que rappelés dans le THÈME I, sont disponibles pour ce « calcul géométrique » qui était le rêve de Leibniz.

1.2.5 Thème III : Produit scalaire

Le produit scalaire est souvent perçu comme lié aux seules questions de perpendicularité dans l'espace. Le produit scalaire fait, bien sûr, mieux que cela : il règle la question de la mesure des angles quelconques dans l'espace.

La notion même de produit scalaire est une conséquence immédiate du théorème de Pythagore généralisé, et du calcul du module d'un vecteur en terme de ses composantes.

De manière un peu plus précise, si on travaille dans un système de coordonnées orthogonales d'origine O, et si on considère les points A, de coordonnées (a_1, a_2, a_3) et B de coordonnées (b_1, b_2, b_3), le théorème de Pythagore généralisé dans le plan déterminé par A, O et B fournit la relation

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\widehat{AOB}$$

d'où on tire immédiatement

$$|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\widehat{AOB} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

La richesse remarquable de cette relation, et en particulier le fait que le membre de gauche soit indépendant du choix d'un système de coordonnées (pourvu qu'elles soient orthogonales), justifie qu'on attribue un nom particulier à la quantité $|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\widehat{AOB}$: c'est le produit scalaire des vecteurs A et B, noté $A \bullet B$.

Cette même relation permet de justifier toutes les propriétés usuelles du produit scalaire, dont la bilinéarité.

1.2.6 Thème IV : Nombres complexes et rotations du plan

Comme on le verra dans la description du THÈME V, les rotations de l'espace pourraient être étudiées à partir d'une extension appropriée de l'interprétation géométrique des nombres complexes. Ceci, en plus de leur importance fondamentale en mathématiques et en physique, explique qu'un thème consacré aux nombres complexes et aux rotations du plan trouve sa place ici.

Ce thème est classique, et suffisamment documenté pour qu'il ne soit pas utile de reprendre ici le détail de son développement. On se limitera dans la suite à deux commentaires.

D'abord, il semble essentiel de fournir une raison valable à l'existence des nombres complexes. L'étude de l'équation du troisième degré sous forme réduite

$$x^3 + px + q = 0$$

mène sans grande difficulté à la formule dite « de Cardan » pour en déterminer une racine. Mais l'application de cette formule à quelques exemples simples tels que

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^3 - 7x - 6 = 0$$

dont on peut, indépendamment, déterminer toutes les racines, amène une conclusion paradoxale : la formule de Cardan, bien que manifestement correcte, ne peut pas s'appliquer, parce qu'elle nécessite l'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif. Par contre, si l'on crée une racine carrée de -1, et qu'à part cela, on calcule comme d'habitude, on retrouve sans trop de peine les racines connues par ailleurs.

Une telle mise en situation permet d'expliquer autant les raisons de l'invention des nombres complexes que les règles de calcul qu'on leur impose ([4]).

D'autre part, le développement des propriétés des nombres complexes utilisera les notions de norme et de trace d'un nombre complexe. Pour mémoire, si a et b sont des nombres réels, et $z = a + bi$ un nombre complexe, on note $\bar{z} = a - bi$ le conjugué de z ; on appelle trace de z, et on note $Tr(z)$, le nombre réel défini par

$$Tr(z) = z + \bar{z} = 2a$$

et on appelle norme de z, et on note $N(z)$, le nombre réel défini par $N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

La trace de z est donc le double de la partie réelle de z, cependant que la norme en est le carré de la valeur absolue.

([4]) Par ailleurs, il est peut-être utile de signaler que le polynôme caractéristique d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ est un polynôme du troisième degré, qu'une transformation (affine) de l'inconnue permet de ramener toujours à une forme réduite.

Réciproquement, la connaissance de la trace et de la norme d'un nombre complexe z permet de retrouver ce nombre en résolvant l'équation du second degré

$$Z^2 - Tr(z) \cdot Z + N(z) = 0$$

En particulier, si les deux nombres complexes $u = a + bi$ et $v = a' + b'i$ sont interprétés comme vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on a la formule

$$\frac{1}{2} Tr(u\bar{v}) = aa' + bb'$$

La forme $\frac{1}{2} Tr(u\bar{v})$ permet donc de retrouver l'expression du produit scalaire de deux vecteurs du plan.

1.2.7 Thème V : Les rotations de l'espace

Comme signalé dans la Problématique, ce thème serait consacré à un premier temps fort : l'étude des rotations de l'espace et de leur composition. En voici, de manière succincte, les étapes principales.

Les rotations élémentaires.

Lors de l'étude géométrique des nombres complexes, on observe que la multiplication par i s'interprète comme une rotation de $\frac{\pi}{2}$ radians. On généralise cette observation à l'espace de la manière suivante. On note :

I, J, K : un système orthonormé de trois vecteurs, orienté dans le sens direct,

- i : la rotation directe d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians définie dans le (seul) plan perpendiculaire à I,
- j : la rotation directe d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians définie dans le (seul) plan perpendiculaire à J,
- k : la rotation directe d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians définie dans le (seul) plan perpendiculaire à K.

On vérifie immédiatement que

$$\begin{array}{lcl} i(J) = K & & i(K) = -J \\ j(K) = I & \text{et} & j(I) = -K \\ k(I) = J & & k(J) = -I \end{array}$$

De plus, on note $-i$, $-j$, $-k$ les rotations réciproques de i, j, k. Comme c'est le cas de i, j, k, ces rotations ne sont définies que dans un plan : i et $-i$ sont définies dans le plan perpendiculaire à I, etc.

On vérifie sans plus de peine que

$$\begin{array}{lcl} -i(J) = -K & & -i(K) = J \\ -j(K) = -I & \text{et} & -j(I) = K \\ -k(I) = -J & & -k(J) = I \end{array}$$

Enfin, là où ces compositions ont du sens, on obtient facilement les formules

$$\begin{array}{lcl} i^2 = -1 & & ij = -ji = k \\ j^2 = -1 & \text{et surtout} & jk = -kj = i \\ k^2 = -1 & & ki = -ik = j \end{array}$$

Des nombres complexes aux quaternions.

Par analogie avec la construction des nombres complexes et leur interprétation géométrique en termes de rotation du plan, on introduit alors l'ensemble

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

des quaternions de Hamilton, munis d'une opération d'addition terme à terme et d'une opération de multiplication induite des formules ci-dessus. L'observation fondamentale est que cette multiplication ne pourrait pas être commutative, et ce pour les raisons géométriques détaillées plus haut !

A part ce défaut de commutativité, l'essentiel des propriétés algébriques des nombres complexes est préservé. Le tableau suivant en résume quelques unes.

	Nombres complexes	Quaternions
Ecriture standard	$z = a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$	$q = a + bi + cj + dk$ où $a, b, c, d \in K$
Conjugué	$\bar{z} = a - bi$	$\bar{q} = a - bi - cj - dk$
Trace	$Tr(z) = z + \bar{z} = 2a$	$Tr(q) = q + \bar{q} = 2a$
Norme	$N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$	$N(q) = q \cdot \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
	Norme multiplicative	Norme multiplicative
Inverse	$z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)}$	$q \neq 0 \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)}$
Corps	commutatif	non commutatif

Où l'on retrouve $\mathbb{R}^3$ ...

Le sous-espace

$$\mathbb{H}_0 = \{bi + cj + dk | b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

des quaternions appelés « purs » (par analogie avec les nombres imaginaires purs) est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Si $p = bi + cj + dk$ et $q = b'i + c'j + d'k$ sont deux quaternions purs, un petit calcul fournit la formule

$$\frac{1}{2}Tr(p\bar{q}) = bb' + cc' + dd'$$

qui montre que le sous-espace des quaternions purs, muni de la forme $\frac{1}{2}Tr(p\bar{q})$ est isométrique à muni du produit scalaire euclidien usuel ...

Et les vraies rotations.

Comme les quaternions ont une multiplication non commutative, il faut distinguer la multiplication à gauche par un quaternion q, qu'on notera g_q, de la multiplication à droite par ce quaternion q, qu'on notera d_q.

Le THÈME IV suggère que si θ est un angle quelconque, alors $g_{\cos\theta+i\sin\theta}$ correspond à une rotation d'angle θ dans le plan sous-tendu par 1 et i, tout comme $d_{\cos\theta+i\sin\theta}$. Mais l'effet de ces opérations dans le plan sous-tendu par j et k est légèrement différent : $g_{\cos\theta+i\sin\theta}$ correspond encore à une rotation d'angle θ dans le plan sous-tendu par j et k, tandis que $d_{\cos\theta+i\sin\theta}$ correspond à une rotation d'angle $-\theta$ dans ce même plan.

On saisit alors l'occasion, en composant une multiplication à gauche avec une multiplication à droite, de décrire non plus une rotation dans *un plan* de l'espace, comme au tout début de la construction, mais bien une rotation de l'espace.

Plus précisément, si q est un quaternion non nul, on note R_q l'application qui à tout quaternion p fait correspondre

$$R_q(p) = q \cdot p \cdot q^{-1}$$

On vérifie immédiatement, en vertu de la discussion précédente, que $R_{\cos\theta+i\sin\theta}$ est l'identité dans le plan sous-tendu par 1 et i, et correspond à une rotation d'angle 2θ dans le plan sous-tendu par j et k.

Or, si p est un nombre réel : $R_q(p) = p$, ce qui implique immédiatement que

$$R_q(\mathbb{H}_0) \subset \mathbb{H}_0$$

de telle sorte que l'application R_q induit aussi une application dans $\mathbb{R}^3$. Cette application est manifestement linéaire. Il est alors clair que $R_{\cos\theta+i\sin\theta}$ représente une rotation complète (et non plus partielle comme plus haut) d'axe correspondant à i, et d'angle 2θ. On obtient une conclusion analogue pour $R_{\cos\theta+j\sin\theta}$ et $R_{\cos\theta+k\sin\theta}$

Un résultat miraculeux.

On déduit de tout ce qui précède le résultat central de ce thème.

> ***Si quel que soit le quaternion*** q ***de norme 1, on pose*** $q = \cos\theta + \sin\theta \cdot \nu_q$***,***
> ***où*** $\nu_q \in \mathbb{H}_0$ ***et*** $N(\nu_q) = 1$ ***, alors*** R_q ***induit, par l'isométrie*** $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$***,***
> ***une rotation d'axe*** ν_q ***et d'angle*** 2θ ***dans*** $\mathbb{R}^3$***.***
> ***De plus, dans cette correspondance, la multiplication des quaternions de norme 1 correspond à la composition des rotations, c'est-à-dire que la rotation*** R_p ***suivie de*** R_q ***correspond à la rotation*** $R_{q\cdot p}$***.***

La deuxième partie du résultat fournit une paramétrisation remarquable de l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ par l'ensemble des quaternions de norme 1. Cette paramétrisation se trouve en effet être l'une des meilleures possibles, au sens suivant : elle est rationnelle (sans dénominateur), sans singularité (les quaternions de norme 1 correspondent à la sphère unité de dimension trois) et elle rend compte de manière simple de la composition des rotations par la seule multiplication de ces « nombres géométriques » que sont les quaternions.

Les résultats qui seraient dégagés dans ce thème pourraient être prolongés dans le THÈME IX, consacré à la géométrie de la sphère.

1.2.8 Thème VI : Volume, produit extérieur et déterminant

Ce thème est l'occasion d'enrichir la collection d'objets qui méritent le statut de vecteurs, à partir de la notion de direction d'un plan. A nouveau, c'est le fait d'être porteur d'un calcul linéaire qui sera au centre de la discussion.

S'il s'agit de formaliser la notion de direction d'un plan, il convient d'abord de revenir sur la notion de direction d'une droite.

Dans l'espace, une droite vectorielle (c'est-à-dire passant par l'origine O) est entièrement déterminée par un vecteur non nul : le vecteur directeur de la droite.

Ce vecteur n'est pas unique, et il importe de bien comprendre ce que signifie cette non-unicité. Si U et V sont deux vecteurs directeurs d'une même droite, il existe un nombre réel k tel que $U = k \cdot V$. Ce nombre réel décrit deux propriétés géométriques simples, mais importantes, de la droite en question : sa valeur absolue permet de comparer les mesures de longueurs sur la droite, selon qu'on se sert de U ou de V comme unité, et son signe précise l'orientation sur cette droite.

La question est maintenant d'obtenir une description d'un plan vectoriel (c'est-à-dire passant lui aussi par l'origine O) aussi proche que possible de la description rappelée ci-dessus d'une droite vectorielle. Dans ce but, nous cherchons à définir ce qui pourrait s'appeler un élément directeur d'un plan vectoriel.

Or, si tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont — pour une raison de dimension — naturellement proportionnels, les vecteurs situés dans un même plan ne le sont pas nécessairement : plus précisément, il faut deux vecteurs entre lesquels n'existe aucune relation linéaire pour déterminer un plan vectoriel et, si U et V sont deux tels vecteurs, alors deux vecteurs S et T détermineront le même plan pourvu qu'ils dépendent linéairement de U et V, c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels k, l, m et n tels que

$$\begin{cases} S = k \cdot U + l \cdot V \\ T = m \cdot U + n \cdot V \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad kn - ml \neq 0$$

La relation de proportionnalité est donc à première vue moins directement interprétable ! D'autre part, la notion de longueur n'est pas un aspect intrinsèque de la notion de plan, c'est plutôt la notion d'aire qui conviendrait. Enfin, la notion intuitive d'orientation d'un plan s'appuie, par exemple, sur la donnée d'un couple ordonné de vecteurs non colinéaires de ce plan.

Cet ensemble d'observations préside à la création d'un nouvel objet mathématique, associé à la direction d'un plan. C'est l'idée de mesure d'une aire qui est décisive, et on va l'étudier suivant la méthode déjà utilisée dans le cas du produit scalaire.

On travaille d'abord dans le plan, et on fixe un repère orthonormé d'origine O, et on considère les points A, de coordonnées (a_1, a_2), B de coordonnées (b_1, b_2), et le parallélogramme $OADB$, où $D = A + B$. Une mesure de l'aire de ce parallélogramme est alors donnée par $|OA| \cdot |OB| \cdot |\sin\theta|$ où θ est l'angle orienté $\widehat{AOB}$. La définition du produit scalaire donne

$$|\sin\widehat{AOB}| = \sqrt{1 - \left(\frac{A \bullet B}{\|A\| \cdot \|B\|}\right)^2} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|B\|}\sqrt{\|A\|^2.\|B\|^2 - (A \bullet B)^2}$$

d'où on tire

$$\|A| \cdot \|B| \cdot |\sin\widehat{AOB}| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2(b_1 + b_2)^2 - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1|$$

La présence des valeurs absolues signale que, telle quelle, cette formule ne pourrait pas avoir une interprétation strictement linéaire.

On observe par la même occasion que l'expression $a_1b_2 - a_2b_1$ dépend de l'ordre dans lequel on considère les vecteurs A et B, et aussi de l'ordre dans lequel on considère les axes de coordonnée : une notion algébrique d'aire devrait donc être porteuse d'un signe associé à l'idée d'orientation, tant pour le système de coordonnées que pour les vecteurs qu'on considère.

On est ainsi amené à proposer la définition suivante. Si on considère deux vecteurs orthonormés E_1 et E_2 du plan tels que les coordonnées correspondantes des points A et B soient (a_1, a_2) et (b_1, b_2), on note $A \wedge B$ l'« élément d'aire orientée » associé au parallélogramme $OADB$, et pareillement pour $E_1 \wedge E_2$. Si on convient alors de traduire l'idée géométrique d'orientation par celle algébrique d'antisymétrie,

$$\begin{aligned} A \wedge B &= -B \wedge A \\ E_1 \wedge E_2 &= -E_2 \wedge E_1 \end{aligned}$$

les observations faites ci-dessus se résument dans la formule

$$A \wedge B = (a_1b_2 - a_2b_1)(E_1 \wedge E_2)$$

qui présente l'avantage de décrire $a_1b_2 - a_2b_1$ comme un coefficient de proportionnalité entre deux éléments d'aire orientée.

D'autre part, si on explicite le membre de gauche de cette dernière formule

$$(a_1E_1 + a_2E_2) \wedge (b_1E_1 + b_2E_2) = (a_1b_2 - a_2b_1)E_1 \wedge E_2$$

et qu'on fait référence à l'hypothèse d'antisymétrie, cette formule apparaît comme l'expression d'une opération bilinéaire sur les vecteurs de V_2 : il suffit d'observer qu'il est tout à fait géométrique de prolonger l'antisymétrie aux cas dégénérés par $E_1 \wedge E_1 = E_2 \wedge E_2 = 0$.

Mais arrivé là, il se fait qu'on a obtenu beaucoup plus qu'on ne croit !

Plus précisément, à tout couple (U, V) de vecteurs du plan, on a associé un nouvel objet, noté $U \wedge V$, et caractérisé par

– *une propriété d'antisymétrie :* $U \wedge V = -(V \wedge U)$
– *une propriété de linéarité :* $(k \cdot U + l \cdot V) \wedge W = k \cdot (U \wedge W) + l \cdot (V \wedge W)$

d'où découle la formule $A \wedge B = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(E_1 \wedge E_2)$.

Mais ces propriétés elles-mêmes ne dépendent pas du choix d'un système de coordonnées ; elles sont en particulier valables sans que ce système soit orthonormé, et sans que cela n'enlève quoi que ce soit à l'interprétation de l'objet $U \wedge V$ comme « élément d'aire orienté ». La traduction en coordonnées permet même de comparer entre eux de tels éléments. En effet, si E_1 et E_2 sont deux vecteurs quelconques, alors quels que soient les vecteurs U et V décrits dans le système de coordonnées associé à E_1 et E_2 par

$$\begin{cases} U = k \cdot E_1 + l \cdot E_2 \\ V = m \cdot E_1 + n \cdot E_2 \end{cases}$$

on a

$$U \wedge V = (kn - lm) \cdot E_1 \wedge E_2$$

où $kn - lm$ s'interprète bien (au signe près) comme facteur de proportionnalité entre l'aire usuelle du parallélogramme associé à U et V et l'aire usuelle du parallélogramme associé à E_1 et E_2.

Pour s'en convaincre si besoin est, il suffit de considérer deux vecteurs, orthonormés cette fois-ci, F_1 et F_2 de V_2, et les nombres réels a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} E_1 = a \cdot F_1 + b \cdot F_2 \\ E_2 = c \cdot F_1 + d \cdot F_2 \end{cases}$$

on a alors les nouvelles relations de dépendance linéaire

$$\begin{cases} U = (ka + lc) \cdot F_1 + (kb + ld) \cdot F_2 \\ V = (ma + nc) \cdot F_1 + (mb + nd) \cdot F_2 \end{cases}$$

qui impliquent

$$U \wedge V = [(ka + lc)(mb + nd) - (kb + ld)(ma + nc)] \cdot (F_1 \wedge F_2)$$

et font de $|(ka + lc)(mb + nd) - (kb + ld)(ma + nc)|$ l'aire usuelle du parallélogramme associé à U et V. Or, on vérifie sans peine

$$(ka + lc)(mb + nd) - (kb + ld)(ma + nc) = (kn - lm)(ad - bc)$$

tandis que

$$E_1 \wedge E_2 = (ad - bc) \cdot (F_1 \wedge F_2)$$

fait de $|ad - bc|$ l'aire usuelle du parallélogramme associé à E_1 et E_2. L'interprétation annoncée de la formule $U \wedge V = (kn - lm) \cdot E_1 \wedge E_2$ s'ensuit.

Toute cette construction, et la discussion qui l'a suivie, s'applique sans modification à l'espace : à tout couple (U, V) de vecteurs de l'espace, on associe l'objet, noté $U \wedge V$, et caractérisé par les propriétés

- *d'antisymétrie :* $U \wedge V = -(V \wedge U)$
- *de linéarité :* $(k \cdot U + l \cdot V) \wedge W = k \cdot U \wedge W + l \cdot V \wedge W$

Ce nouvel objet mathématique est appelé *produit extérieur*, ou *de Grassmann*, de U et V. La construction, toute linéaire qu'on en a donnée justifie qu'on attribue encore le statut de vecteur à ce nouvel objet, même s'il est intrinsèquement associé à l'idée de plan et d'aire, et non plus à la seule idée de ligne ou de segment. C'est pour signaler cette nuance qu'on utilise souvent la terminologie de *2-vecteur*, ou *bivecteur*.

On peut alors revenir à la question de décrire une notion d'élément directeur pour un plan vectoriel déterminé par deux vecteurs U et V, suivant les exigences de proportionnalité « élargie », d'aire et d'orientation détaillées au tout début de la description du thème. Et la réponse est maintenant immédiate : l'analogue du vecteur directeur est ici le produit extérieur $U \wedge V$, puisqu'il a toutes les propriétés requises.

Il reste encore à régler un problème qu'on peut qualifier de réciproque du précédent.

Considérons deux vecteurs U et V quelconques et soient E_1, E_2, E_3, trois vecteurs que l'on peut, comme on l'a vu plus haut, supposer orthonormés sans nuire à la généralité. Si on a

$$\begin{cases} U = u_1 \cdot E_1 + u_2 \cdot E_2 + u_3 \cdot E_3 \\ V = v_1 \cdot E_1 + v_2 \cdot E_2 + v_3 \cdot E_3 \end{cases}$$

on calcule sans peine

$$U \wedge V = (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot E_1 \wedge E_2 + (u_1v_3 - u_3v_1) \cdot E_1 \wedge E_3 + (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot E_2 \wedge E_3$$

qui montre comment le bivecteur associé à un plan se décompose dans un système de coordonnées.

La réciproque établit que tout bivecteur est associé à un et un seul plan. Plus précisément

> ***quel que soit le bivecteur*** $\omega = a \cdot E_1 \wedge E_2 + b \cdot E_1 \wedge E_3 + c \cdot E_2 \wedge E_3$***, il existe au moins deux vecteurs*** U ***et*** V ***tels que*** $\omega = U \wedge V$ ***; de plus, tous ces vecteurs*** U ***et*** V ***tels que*** $\omega = U \wedge V$ ***sont orthogonaux au vecteur*** $c \cdot E_1 - B \cdot E_2 + a \cdot E_3$***.***

On note $*\omega$ (« étoile de Hodge ») le vecteur $c \cdot E_1 - b \cdot E_2 + a \cdot E_3$ ainsi associé au bivecteur $\omega = a \cdot E_1 \wedge E_2 + b \cdot E_1 \wedge E_3 + c \cdot E_2 \wedge E_3$.

Dans le cas où le bivecteur ω est déjà décomposé, c'est-à-dire si U et V sont deux vecteurs comme ci-dessus, et $\omega = U \wedge V = (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot E_1 \wedge E_2 + (u_1v_3 - u_3v_1) \cdot E_1 \wedge E_3 + (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot E_2 \wedge E_3$

alors on appelle $*\omega$ le produit vectoriel de U et V, ce qu'on note $U \times V$; on a donc

$$U \times V = (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot E_3 + (u_3v_1 - u_1v_3) \cdot E_2 + (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot E_1$$

On retrouve sans peine les propriétés bien connues du produit vectoriel. En particulier, on peut interpréter de manière classique le module de $U \times V$ comme mesure de l'aire du parallélogramme associé à U et V, mais dans l'espace cette fois-ci. Cela renforce, si besoin, l'idée qu'un bivecteur modélise un élément d'aire orienté.

Il n'est pas inutile de signaler que, si p et q sont deux quaternions purs

$$\begin{cases} p = bi + cj + dk \\ q = b'i + c'j + d'k \end{cases}$$

on calcule facilement

$$pq = -(bb' + cc' + dd') + (cd' - c'd)i - (bd' - b'd)j + (bc' - b'c)k$$

de telle sorte qu'à travers l'isomorphisme $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$, le produit des quaternions purs fournit à la fois, dans sa partie réelle, le produit scalaire, et dans sa partie pure, le produit vectoriel des vecteurs associés à p et q. Pour ce qui concerne le produit scalaire, cette observation avait permis d'établir dans le THÈME V l'isométrie $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$ grâce à la forme $\frac{1}{2}Tr(p\bar{q})$.

Il reste à montrer que l'opération de produit extérieur peut être itérée, et qu'elle garde une interprétation géométrique analogue à celle dégagée ci-dessus.

Pour l'essentiel, si U, V, W sont trois vecteurs quelconques de l'espace, il s'agit de calculer une mesure du volume, au sens usuel, du parallélipipède qu'ils déterminent. Pour ce faire, on considère trois vecteurs E_1, E_2, E_3 qu'on suppose orthonormés (mais cela ne nuit pas davantage à la généralité qu'auparavant), et grâce auxquels on peut décomposer linéairement U, V, W :

$$\begin{cases} U = u_1 \cdot E_1 + u_2 \cdot E_2 + u_3 \cdot E_3 \\ V = v_1 \cdot E_1 + v_2 \cdot E_2 + v_3 \cdot E_3 \\ W = w_1 \cdot E_1 + w_2 \cdot E_2 + w_3 \cdot E_3 \end{cases}$$

Un raisonnement élémentaire montre que la mesure du volume du parallélipipède en question est donnée par la valeur absolue du nombre réel $(U \times V) \bullet W$.

Une telle formule est un peu hétéroclite : elle mèle deux produits différents, le produit vectoriel et le produit scalaire, dans le but d'évaluer une grandeur pour laquelle les trois vecteurs concernés devraient jouer des rôles équivalents. D'autre part,

$$(U \times V) \bullet W = (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 - (u_1v_3 - u_3v_1)w_2 + (u_2v_3 - u_3v_2)w_1$$

qui présente des propriétés d'antisymétrie remarquables.

Tout cela, ajouté à un raisonnement analogue à celui qui a mené à la définition de bivecteur, mène à étendre l'opération de produit extérieur.

A tout triple (U, V, W) de vecteurs, on associe l'objet, noté $U \wedge V \wedge W$, et caractérisé par les deux propriétés

- $U \wedge V \wedge W = -V \wedge U \wedge W = -W \wedge V \wedge U$ *(antisymétrie « graduée »)*
- $(k \cdot U + l \cdot U') \wedge V \wedge W = k \cdot U \wedge V \wedge W + l \cdot U' \wedge V \wedge W$ *(linéarité)*

Ce nouvel objet mathématique est encore appelé produit extérieur, ou de Grassmann, de U, V, W. Sa construction étant toujours celle d'un objet linéaire, il mérite comme auparavant le statut de vecteur, même s'il est cette fois intrinsèquement associé à l'idée de volume ou d'espace.

Avec les mêmes hypothèses que plus haut, et grâce aux deux seules propriétés d'antisymétrie et de linéarité, on obtient immédiatement

$$U \wedge V \wedge W = [(u_1v_2 - u_2v_1)w_3 - (u_1v_3 - u_3v_1)w_2 + (u_2v_3 - u_3v_2)w_1] \cdot E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$$

ce qui confirme toutes nos intuitions ! De plus, et encore une fois pour les mêmes raisons que dans le cas des bivecteurs, l'hypothèse d'orthonormalité n'a plus rien d'essentiel dans l'interprétation de cette formule.

Enfin, on appelle *déterminant* des vecteurs U, V, W (par rapport à E_1, E_2, E_3), et on note Dét (U, V, W), le nombre réel défini par

$$U \wedge V \wedge W = \text{Dét } (U, V, W) \cdot E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$$

Une telle définition permet d'obtenir toutes les propriétés usuelles du déterminant à partir de raisonnements géométriques en termes de volumes. Il n'y a évidemment aucune difficulté supplémentaire pour définir pareillement la notion de déterminant 2×2.

1.2.9 Thème VII : Systèmes d'équations linéaires

A la suite de ce qui précède, l'étude des systèmes d'équations linéaires n'est plus qu'un exercice ... de géométrie.

On se limite dans la suite à l'étude des systèmes de deux équations à deux inconnues, qui permet déjà de voir à l'œuvre toutes les notions introduites depuis le début. Dans l'approche géométrique, les situations à plus de deux inconnues n'offrent pas de difficulté substantiellement nouvelle, pour la simple raison que la géométrie montre clairement le chemin à suivre, et qu'il est d'ailleurs déjà tout tracé !

On considère le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

On peut l'écrire vectoriellement : si E_1 et E_2 sont deux vecteurs linéairement indépendants, on introduit les « vecteurs colonnes »

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} \cdot E_1 + a_{21} \cdot E_2 \\ A_2 &= a_{12} \cdot E_1 + a_{22} \cdot E_2 \\ B &= b_1 \cdot E_1 + b_2 \cdot E_2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire le système sous la forme

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 = B$$

Cette écriture suggère immédiatement un procédé graphique de résolution du système en question : dans un système d'axes d'origine O associé aux vecteurs E_1 et E_2, on dessine les vecteurs A_1, A_2 et B, et on détermine x_1 et x_2 de telle sorte que $x_1 \cdot A_1$ et $x_2 \cdot A_2$ déterminent les côtés du parallélogramme dont B représente la diagonale issue de O.

L'écriture vectorielle alliée à la notion de produit extérieur fournit par ailleurs immédiatement les célèbres « formules de Cramer »

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2) \wedge A_2 = B \wedge A_2 &\Rightarrow x_1 \cdot \text{Dét}\,(A_1, A_2) = \text{Dét}\,(B, A_2) \\ (x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2) \wedge A_1 = B \wedge A_1 &\Rightarrow x_2 \cdot \text{Dét}\,(A_2, A_1) = \text{Dét}\,(B, A_1) \end{aligned}$$

dont le caractère antisymétrique revêt ainsi une signification géométrique.

Enfin, si le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

possède des solutions, celles-ci ne sont en général pas assujetties à un calcul linéaire, sauf si $b_1 = b_2 = 0$. Pour pallier cet inconvénient, et afin de pouvoir alors exploiter à fond les ressources du calcul linéaire, on commence par homogénéiser ou linéariser ce système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1t = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2t = 0 \end{cases}$$

Cette linéarisation a l'avantage de fournir un système qui a toujours au moins une solution, à savoir $x_1 = x_2 = t = 0$. Il reste à en déterminer toutes les solutions, et parmi celles-ci, à vérifier s'il en existe qui soient telles que $t = 1$.

Mais l'intérêt premier de cette linéarisation est qu'elle permet d'attribuer le statut de vecteur à toute solution du système linéarisé, puisque ces solutions peuvent maintenant s'additionner entre elles pour donner de nouvelles solutions, et qu'en les multipliant par un nombre réel, on fabrique encore des solutions.

Ceci fait, si E_1, E_2 et E_3 sont trois vecteurs linéairement indépendants, on introduit les « vecteurs lignes »

$$\begin{aligned} N_1 &= a_{11} \cdot E_1 + a_{21} \cdot E_2 - b_1E_3 \\ N_2 &= a_{12} \cdot E_1 + a_{22} \cdot E_2 - b_2E_3 \end{aligned}$$

et on montre que les solutions du système linéaire considéré sont les multiples du vecteur $*(N_1 \wedge N_2) = N_1 \times N_2$. L'interprétation géométrique de ce résultat à partir des vecteurs normaux aux plans vectoriels sous-jacents est bien connue.

Il faut signaler que pour un système qui, au départ, présente plus de deux inconnues, cette méthode de linéarisation préalable nécessite de travailler dans un espace à plus de trois dimensions. Mais pas plus les résultats que leur interprétation ne s'en trouvent modifiés.

L'interprétation géométrique de la discussion précédente pourrait se prolonger dans le THÈME X, consacré à une introduction à la géométrie projective, et plus particulièrement au théorème de Desargues et à sa signification en algèbre linéaire.

1.2.10 Thème VIII : Matrices et composition des transformations linéaires

Pour le calcul matriciel, l'un des points de départ pourrait être le suivant. Dans le thème précédent, on a considéré l'espace des solutions d'un système linéaire. Ici, il s'agirait aussi d'étudier le calcul linéaire sur les équations linéaires elles-mêmes, afin de pouvoir attribuer aux équations linéaires, puis aux applications linéaires, le statut de vecteur. Cela pourrait déboucher sur une première approche de la notion de dualité, par exemple à partir du produit scalaire. Quant au produit matriciel, il serait fait mention que ce n'est pas la première fois qu'un produit est défini sur des objets géométriques (ici, les substitutions linéaires) : les nombres complexes et les quaternions sont des nombres « géométriques » munis d'une multiplication dont on peut expliciter une représentation matricielle, et le produit extérieur permettrait d'introduire la notion de déterminant avec ses principales propriétés, y compris la multiplicativité (cfr. la discussion sur la « relativité » des éléments d'aire orientée).

Mais d'autre part, ce thème, quant à ce qui concerne les transformations linéaires et leur composition, aurait déjà été significativement exploré à travers les thèmes précédents. On peut citer dans cet ordre d'idées : les notions de dépendance linéaire, de rotations du plan et de l'espace avec leur composition, mais surtout les nombreuses discussions concernant la signification géométrique de toutes les notions introduites, et qui nécessitaient d'étudier l'effet du choix d'un système d'axes quant au sens de certaines formules, dans le cas du produit scalaire ou du produit extérieur par exemple.

Ainsi, ce dernier grand thème, serait autant un thème de synthèse qu'un thème de découverte.

1.2.11 Conclusions

Un certain nombre de raisons d'être de ce projet, tant pédagogiques que mathématiques, ont déjà été détaillées dans l'introduction et la première partie du chapitre 1 de ce rapport.

A l'issue de cette description résumée des grands thèmes, il est possible d'expliciter d'autres raisons encore, à la fois plus techniques et plus générales, qui ont présidé au choix des sujets.

L'algèbre linéaire a la réputation d'une discipline très abstraite, dont l'exploration, sinon la maîtrise devrait être réservée au seul (futur) mathématicien professionnel. En ce sens, elle ne figurerait pas dans ce bagage mathématique de base qu'on appelle « les mathématiques du citoyen ». Ce projet voudrait fournir quelques éléments de réflexion qui vont à l'encontre de cette croyance.

Nous sommes persuadés que l'algèbre linéaire fait partie de ces « mathématiques du citoyen » parce que son objet est de faire face avec les moyens les plus simples possible à des situations complexes, et qu'il est bien clair que cette complexité sans cesse croissante est une des caractéristiques premières du monde tel qu'un citoyen le voit évoluer sous ses yeux.

C'est un des parti-pris de notre projet que de faire face avec des moyens simples à des situations géométriques complexes.

Ainsi, comme la proportionnalité est une des bases des mathématiques élémentaires, c'est elle que nous avons choisie comme modèle simple pour arriver à la notion centrale de relation(s) de dépendance(s) linéaire(s). Comme on l'a vu, c'est cette notion qui permet de rassembler des situations mathématiques à priori bien différentes.

Déjà les coordonnées, les points ou les translations peuvent être vues comme incarnations d'un même objet, le vecteur, qui les exprime tous et qui simplifie les situations : le vecteur de la géométrie de l'espace n'est qu'un seul objet, qui en représente trois dès qu'on l'exprime dans un système d'axes. L'étude du produit extérieur a pareillement montré comment la pensée linéaire permet de dégager d'une situation complexe et multiple, deux règles simples, qui renferment en elles toutes l'information dont on a besoin. Le calcul matriciel n'a pas d'autre but que de permettre la manipulation d'informations multiples : une matrice 3×3 permet de traiter 9 nombres comme un seul.

Ainsi, une notion aussi élémentaire que la proportionnalité, bien utilisée, simplifie et ordonne les phénomènes !

A tous les moments cruciaux de la progression dans les thèmes, il a encore été fait mention, aussi explicitement que possible, du pourquoi des choses. Ainsi, les nombres complexes ne sont-ils pas apparus pour le plaisir, mais pour résoudre les paradoxes de Cardan, et les règles de leur calcul en ont été déduites. Pareillement, les quaternions de Hamilton ont vu le jour pour maîtriser les rotations de l'espace et leur composition. Le produit extérieur a été introduit pour rendre compte de la direction des plans, de la mesure des aires et des volumes, mais aussi pour unifier toutes les questions de résolutions de systèmes d'équations. Sans parler de l'invention même de la notion de vecteur ...

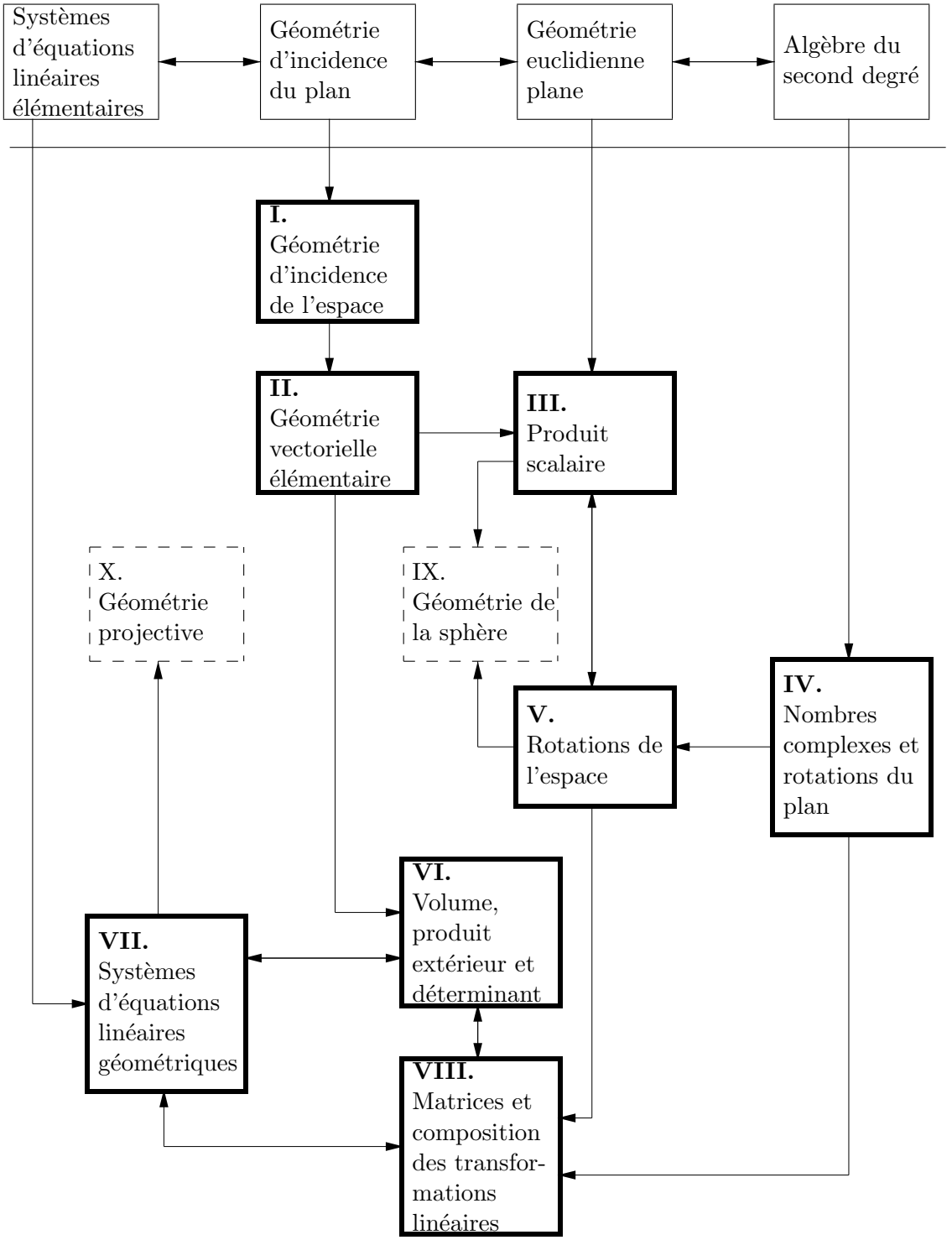
Une fois dévoilée leur raison d'être, ces objets soi-disant abstraits perdent de leur mystère, deviennent aussi réels que les autres, et à la portée de tout le monde.

Et ce qui n'a pas encore été dit, c'est que cet effort de projeter la seule idée de proportionnalité dans tous les recoins de la géométrie, est efficace. Cet effort libère la géométrie de l'obstacle de la représentation visuelle et, paradoxalement peut-être, en modélisant convenablement les objets géométriques les plus fondamentaux et les plus visuels ! L'obstacle de la pensée visuelle, déjà perceptible en dimension 3, et presque infranchissable au-delà, s'évanouit, dès qu'on pense linéairement. Car il y a moyen de montrer que tout ce qui a été fait dans ce projet se généralise à un nombre quelconque de dimensions sans aucune difficulté nouvelle, sans avoir à rien imaginer de nouveau.

Alors que c'était là que la complexité visuelle des situations géométriques nous arrêtait, l'obstacle s'évanouit : la complexité est maîtrisée ! Bien sûr, toutes ces raisons ne rendent pas encore entièrement compte de la pertinence d'un enseignement de l'algèbre linéaire dans les deux dernières années de l'enseignement secondaire. Elles montrent en tout cas qu'à côté de ses innombrables applications, l'algèbre linéaire possède une réelle valeur formative, profondément adaptée à un projet éducatif.

C'est là une des meilleures raisons qui soient pour la défendre et l'illustrer !

1.3. Relations entre les thèmes


Systèmes d'équations linéaires élémentaires
Géométrie d'incidence du plan
Géométrie euclidienne plane
Algèbre du second degré
I. Géométrie d'incidence de l'espace
II. Géométrie vectorielle élémentaire
III. Produit scalaire
X. Géométrie projective
IX. Géométrie de la sphère
IV. Nombres complexes et rotations du plan
V. Rotations de l'espace
VI. Volume, produit extérieur et déterminant
VII. Systèmes d'équations linéaires géométriques
VIII. Matrices et composition des transformations linéaires

Chapitre 2

Les séquences d'enseignement

2.1 La géométrie d'incidence de l'espace 47
2.1.1 Introduction 48
2.1.2 Prérequis 49
2.1.3 Fiche n° 1 : Incidence et parallélisme (1) 52
2.1.4 Fiche n° 2 : Incidence et parallélisme (2) 56
2.1.5 Fiche n° 3 : Incidence et parallélisme (3) 60
2.1.6 Synthèse 65
2.2 La géométrie vectorielle élémentaire 68
2.2.1 Introduction 69
2.2.2 Fiche n° 4 : Projections et coordonnées 71
2.2.3 Fiche n° 5 : Équations vectorielles d'une droite 77
2.2.4 Fiche n° 6 : Équations vectorielles d'un plan 80
2.2.5 Synthèse 83
2.3 Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires 86
2.3.1 Introduction 87
2.3.2 Fiche n° 7 : Point de percée d'une droite dans un plan 88
2.3.3 Fiche n° 8 : Équations cartésiennes d'un plan 92
2.3.4 Fiche n° 9 : Équations cartésiennes d'une droite 99
2.3.5 Fiche n° 10 : Projecteurs et équations cartésiennes 110
2.3.6 Fiche n° 11 : Formes linéaires (1) 116
2.3.7 Fiche n° 12 : Formes linéaires (2) 120
2.3.8 Synthèse 124

2.4 Le produit scalaire 126
2.4.1 Introduction 127
2.4.2 Fiche n° 13 : Le produit scalaire 128
2.4.3 Fiche n° 14 : Sphères et plans 138
2.4.4 Synthèse 148
2.5 Produit vectoriel, volume et déterminant 150
2.5.1 Introduction 151
2.5.2 Fiche n° 15 : Produit vectoriel, volume et déterminant 152
2.6 Les rotations de l'espace 165
2.6.1 Introduction 166
2.6.2 Fiche n° 16 : Les rotations cubiques 169
2.6.3 Fiche n° 17 : La représentation matricielle des rotations 180

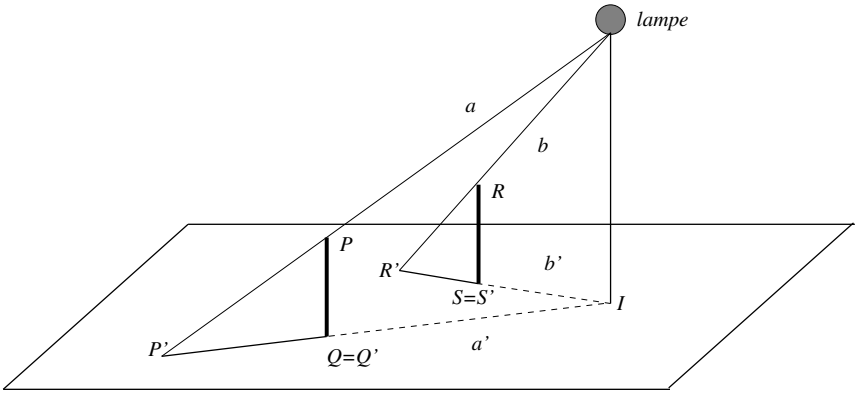
2.1. La géométrie d'incidence de l'espace

2.1.1 Introduction

Dans cette première section, nous rappelons quelques résultats élémentaires de la géométrie d'incidence de l'espace dans le cadre des ombres au soleil. C'est l'occasion d'établir quelques propriétés des projections parallèles et d'introduire l'usage de réseaux cubiques.

Il y a deux types d'ombres : les ombres au soleil et les ombres à la lampe, qui correspondent respectivement aux projections parallèles et aux projections centrales. On peut aisément faire le lien entre ces deux types de projections, ce qui permet de dégager une propriété caractéristique des projections parallèles. Voici en effet une petite expérience ...

Considérons deux bâtons placés perpendiculairement à une table et une lampe placée sur cette table, à une hauteur plus grande que la taille des bâtons.



Nous observons une projection centrale, dont le centre de projection est la lampe.

En prolongeant mentalement les ombres $P'Q'$ et $R'S'$ des bâtons PQ et RS, nous obtenons deux droites a' et b' qui se rejoignent à la verticale de la lampe. A présent, éloignons la lampe de plus en plus des bases Q et S des bâtons. Le point d'intersection I des droites a' et b' s'éloigne en conséquence et les droites a' et b' tendent ainsi de plus en plus à être parallèles de même que les droites a et b. Dans ce cas extrême, on parle de projection parallèle ou affine.

Les ombres au soleil de segments verticaux sont donc parallèles. De manière plus générale, la projection sur un plan α d'un point P parallèlement à une droite d est le point d'intersection avec α de la parallèle à d passant par P.

Une telle projection conserve le parallélisme des droites.

REMARQUE 2.1.1 *Les ombres au soleil ou à la lampe ne conservent pas en général les distances. Les ombres au soleil, contrairement aux ombres à la lampe, conservent les rapports des longueurs de segments parallèles. Mais ni les ombres au soleil, ni les ombres à la lampe ne conservent les rapports des longueurs de segments quelconques.*

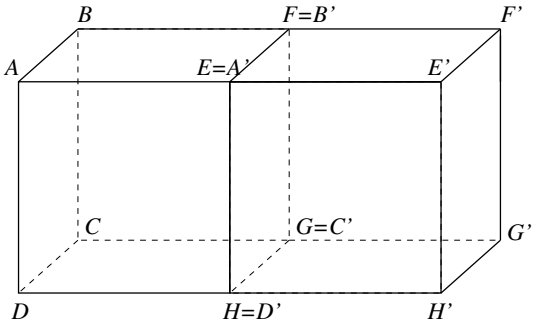
2.1.2 Prérequis

Les situations exploitées dans cette section reposent sur l'utilisation d'un réseau cubique. On peut en effet considérer que les élèves ont déjà eu très souvent l'occasion de manipuler un cube avant d'arriver dans le troisième cycle de l'enseignement secondaire. Cet objet leur étant familier, sa représentation graphique plane leur est plus facile à interpréter que bien d'autres figures *a priori* plus élémentaires. Par exemple, montrer deux droites gauches sur la représentation d'un cube en perspective cavalière possède une signification. Par contre, toute représentation isolée de deux droites gauches est toujours aussi celle soit de deux droites sécantes, soit celle de deux droites parallèles et ne peut donc aucunement contribuer à l'apprentissage de la « vision spatiale », c'est-à-dire de la capacité d'interpréter spatialement une représentation graphique plane.

De plus, les élèves ont d'un cube une connaissance intuitive sur laquelle nous pouvons nous appuyer pour dégager les propriétés que nous voulons mettre en évidence.

Nous utiliserons ainsi sans explications inutiles le fait que si deux cubes $ABCDEFGH$ et $A'B'C'D'E'F'G'H'$ de même taille sont placés de façon que la face $EFGH$ coïncide avec la face $A'B'C'D'$, alors les faces $ABFE$ et $A'B'F'E'$ sont coplanaires, ainsi que $AEHD$ et $A'E'H'D'$, etc

De même, les faces $ABCD$, $EFGH$, $A'B'C'D'$, et $E'F'G'H'$ sont parallèles, ainsi que les droites AD, BC, EH, FG, $A'D'$, $B'C'$,...



Nous admettons aussi que deux éléments (l'un situé dans le cube $ABCDEFGH$, l'autre dans le cube $A'B'C'D'E'F'G'H'$) qui se correspondent par translation au long d'une arête sont parallèles et ont même longueur (s'il s'agit de segments). Nous pensons que ces propriétés ne doivent pas nécessairement être explicitées dans un premier temps.

Cependant, si les élèves posent des questions, il convient évidemment de leur répondre. et de toutes façons, certaines démonstrations devant être données dans un second temps, une synthèse devra être rédigée.

Pour tenir compte de ce double point de vue, les traitements de certaines des situations (fiche n°1, et dernier exercice de la fiche n°3) ont reçu une présentation « en deux passages ». Dans un premier passage, on donne des justifications reposant sur les constatations intuitives exploitant la situation particulière du réseau cubique, en particulier l'invariance de certains éléments par translation. Le second passage fournit des justifications plus complètes, ne recourant pas aux translations qui conservent un réseau cubique et ne faisant appel, en dehors des propriétés élémentaires d'un cube (angles droits, arêtes parallèles et de même longueur) qu'aux définitions et axiomes mentionnés ci-dessous. On énonce alors explicitement les propriétés devant faire l'objet d'une synthèse et auxquelles il sera fait appel dans les situations suivantes. Cette méthode permet de motiver les développements théoriques en les insérant dans la résolution d'un problème.

Nous pensons que quel que soit le niveau de la classe, il est utile pour la formation de l'intuition spatiale de faire d'abord appel aux raisonnements liés au réseau cubique. Selon les circonstances, le professeur décidera ensuite du niveau de rigueur qu'il désire atteindre avec les élèves, en présentant éventuellement les justifications valables en dehors de la situation initiale. Ces justifications reposent sur les définitions et axiomes suivants :

Axiomes

Axiome I : Par deux points de l'espace passe une et une seule droite. *(axiome de droite)*

Axiome II : Par trois points distincts non-alignés de l'espace passe un et un seul plan, et toute droite passant par deux points d'un plan est entièrement incluse à ce plan. *(axiome de plan)*

Axiome III : Il existe quatre points non coplanaires.

Axiome IV : Deux plans qui ont un point commun ont une droite commune passant par ce point.

Axiome V : Toute propriété géométrique *du* plan est valable dans tous les plans de l'espace.*(axiome d'extension)*

Les axiomes III et IV signifient, ensemble, que l'espace est de dimension 3.

Définitions

Parallélisme :

Définition 2.1.2 *Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires disjointes, ou confondues.*

Définition 2.1.3 *Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun, ou qu'ils sont confondus.*

DÉFINITION 2.1.4 *Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est contenue dans ce plan ou qu'elle en est disjointe.*

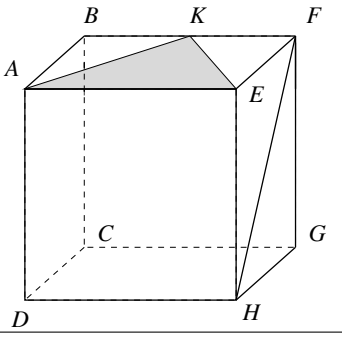
Projection :

DÉFINITION 2.1.5 *La projection sur un plan α d'un point P parallèlement à une droite d est le point d'intersection avec α de la parallèle à d passant par P.*

Dans toute la suite de ce fascicule, les passages en italique sont spécialement destinés au professeur. Quant au signe ■, il marque la fin des démonstrations.

2.1.3 Fiche n° 1 : Incidence et parallélisme (1)

Soit K le milieu de l'arête $[BF]$. Construire l'ombre projetée par le triangle AKE sur le plan $CDGH$, les rayons du soleil étant orientés dans la direction de la droite FH.



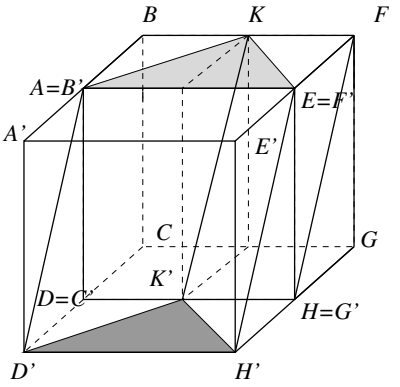
2.1.3.1 Solution commentée

Principe de la construction :

Nous allons dessiner les ombres des points A, K et E. Puis, nous les relierons pour connaître l'ombre du triangle AKE.

Résolution utilisant de façon informelle les propriétés du réseau cubique

Construisons un nouveau cube $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sur la face $AEDH$. Notons K' le milieu du segment $[DH] = [C'G']$.



La construction enchaîne les étapes suivantes :

1. Tracer les diagonales $[AD']$ et $[EH']$. Les droites AD', EH' et KK' sont parallèles à FH car elles se correspondent par translation au long d'arêtes du réseau cubique. Elles sont donc parallèles entre elles.
2. L'ensemble des parallèles à FH passant par les points de AK constitue le plan $AKK'D'$. C'est le plan PROJETANT de AK.
3. La projection de la droite AK sur $CGDH$ parallèlement à FH est la droite $D'K'$ car c'est l'intersection des plans $AKK'D'$ et $CGDH$.
4. La projection du segment $[AK]$ sur $CGDH$ parallèlement à FH est le segment $[D'K']$. En effet, dans le plan $AKK'D'$ comme dans tout autre plan, la projection d'un segment sur une droite parallèlement à une autre droite est un segment.

5. De même, les projections des segments $[KE]$ et $[AE]$ sont les segments $[K'H']$ et $[D'H']$, et la projection du triangle AKE est le triangle $D'K'H'$.

■

2.1.3.2 Justifications complètes et propriétés à retenir

Seules les étapes 1 et 2 de la construction nécessitent des justifications complémentaires. Elles constituent aussi l'occasion d'introduire les premières propriétés de la géométrie d'incidence. Vu le caractère classique de la plupart des démonstrations, nous laissons au lecteur le soin de réaliser lui-même des figures illustratives. Mais nous insistons sur l'idée de placer ces figures dans le contexte d'un réseau cubique, ce qui facilite la perception spatiale.

1. **Pourquoi les droites KK', AD', EH' et FH sont-elles deux à deux parallèles ?**
   Le quadrilatère $KFHK'$ est un parallélogramme car les côtés $[KF]$ et $[K'H]$ sont parallèles et de même longueur. Puisque tout théorème de géométrie plane est valable dans tout plan de l'espace (axiome V), $KK' \,//\, FH$. De même, $EH' \,//\, FH$ et $AD' \,//\, FH$, ...
   Nous pourrions de la sorte établir les six relations de parallélisme entre les quatre droites KK', AD', EH' et FH. Il est plus économique et surtout plus utile de prouver la transitivité du parallélisme, ce qui nécessite des propositions intermédiaires importantes en elles-mêmes.

PROPOSITION 2.1.6 *(Euclide) Par tout point de l'espace passe une et une seule parallèle à une droite FH.*

Soit P un point. Si $P \in FH$, la seule parallèle à FH passant par P est FH (par la définition du parallélisme de deux droites).
Si $P \notin FH$, toute parallèle à FH passant par P est dans le plan PFH. Et dans ce plan, on trouve effectivement une et une seule parallèle à FH passant par P (via l'axiome d'Euclide dans le plan et l'axiome V).

■

PROPOSITION 2.1.7 *Une droite a parallèle à une droite b d'un plan α est parallèle au plan α.*

Supposons $a \,//\, b$ et $b \subset \alpha$. Si $a = b$ alors $a \subset \alpha$ donc $a \,//\, \alpha$. Si $a \neq b$, le plan ab coupe α selon la droite b (axiomes II et IV). Donc tout point de a qui appartiendrait à α serait sur b, ce qui est impossible. Ainsi $a \,//\, \alpha$.

■

PROPOSITION 2.1.8 *Si la droite a est parallèle au plan α, tout plan β passant par a et non parallèle à α coupe α suivant une parallèle à a.*

Soit β un plan passant par a. Si $a \subset \alpha$, alors $\alpha \cap \beta = a$ et la thèse est prouvée.
Si $a \not\subset \alpha$, l'intersection de α et β est une droite d'après l'axiome IV. La droite a ne saurait avoir aucun point commun avec cette intersection qui est donc une droite parallèle à a.

■

PROPOSITION 2.1.9 *Soient a et b deux droites parallèles distinctes et P un point non situé dans le plan ab. Les plans Pa et Pb se coupent selon une parallèle à a et b.*

Posons $d = Pa \cap Pb$. Puisque $a \,//\, b$, a est parallèle au plan Pb. D'après la proposition précédente, la droite d est parallèle à a. De même, d est parallèle à b.

■

PROPOSITION 2.1.10 *Soient a, b et c trois droites telles que $a \,//\, b$ et $b \,//\, c$, alors $a \,//\, c$.*

Si la droite c est incluse au plan ab, on sait que c est parallèle à a car la transitivité du parallèlisme des droites dans le plan est connue.
Si $c \not\subset ab$, soit P un point de c non situé dans ab. D'après la proposition 2.1.9, l'intersection de Pa et de Pb est une droite parallèle à a et à b. C'est donc la parallèle à b passant par P, c'est-à dire la droite c elle-même. Par conséquent, $c \,//\, a$.

2. **Pourquoi les parallèles à FH passant par les points de AK constituent-elles un plan ?**
On établit d'abord l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.1.11 *Soient c et d deux droites non parallèles. Par deux points distincts A et B de c, on trace les parallèles a et b à d. Alors les droites a, b et c sont coplanaires.*

Vu la transitivité du parallélisme, nous savons déjà que a et b sont coplanaires. Et la droite c est incluse au plan ab puisqu'elle contient un point de a et un point de b.

■

La proposition suivante fournit un peu plus que la réponse à la question 2 :

PROPOSITION 2.1.12 *Etant données deux droites non parallèles a et d, il existe un et un seul plan passant par a et parallèle à d.*

Soit P un point de a. Par P, traçons la parallèle p à d. d'après la proposition 2.1.9, toute parallèle à d passant par un point de a est dans le plan pa. Les parallèles constituent donc le plan pa, et celui-ci est parallèle à d.

Il reste à prouver qu'il n'y a qu'un seul plan passant par a et parallèle à d. Supposons qu'il y en ait deux, α et β.

Si P est un point de a, d'après la proposition 2.1.8, Pd coupe aussi bien α que β selon une parallèle à d. Ainsi, toutes les parallèles à d passant par les points de a sont à la fois dans α et β de sorte que $\alpha = \beta$.

■

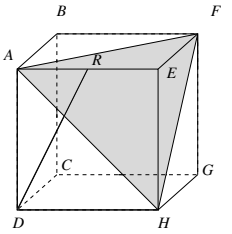
Puisque les parallèles à une droite d, passant par les points d'une droite a constituent un plan, on a immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.1.13 *Si a et d sont deux droites non parallèles et si α est un plan non parallèle à d, la projection de a sur α parallèlement à d est une droite.*

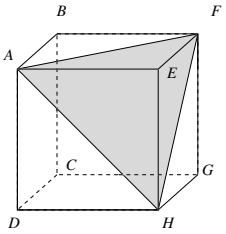
■

2.1.4 Fiche n° 2 : Incidence et parallélisme (2)

Construire les ombres au soleil de triangles dont les sommets sont situés sur les faces d'un cube.

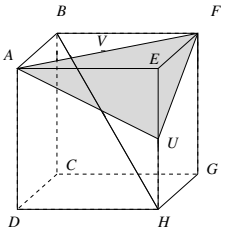


1. Projeter AFH sur $CDGH$ parallèlement à RD. (R est le milieu du segment $[AE]$)



2. Projeter AFH sur $CDGH$ parallèlement à AH.

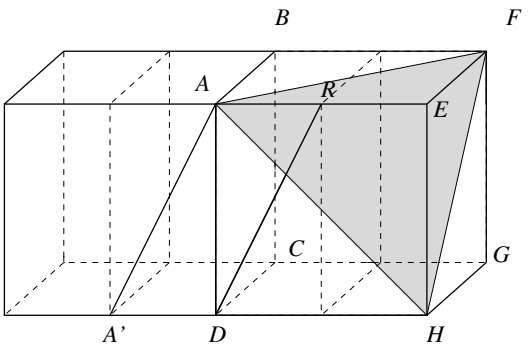
3. Projeter AFU sur $CDGH$ parallèlement à BH. (U est le milieu du segment $[EH]$)



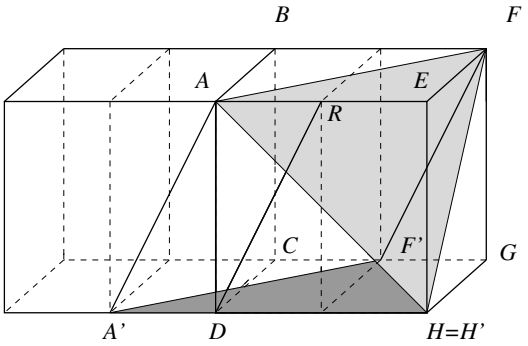
2.1.4.1 Solution commentée

Projection de AFH parallèlement à RD

Cherchons l'ombre du triangle AFH sur le plan $CGHD$ en supposant que le soleil éclaire dans la direction de la droite RD.

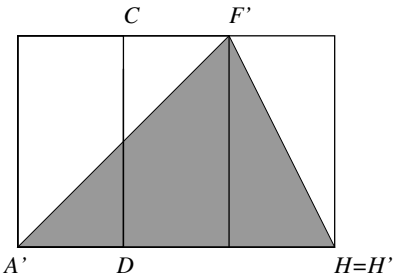


Sur la face $ABCD$, construisons un nouveau cube, et coupons-le en deux. Le point A joue dans l'un de ces demi-cubes le même rôle que R dans le demi-cube comprenant $ABCD$ et R. On trouve ainsi facilement que la projection de A est A' ($ARDA'$ est un parallélogramme).



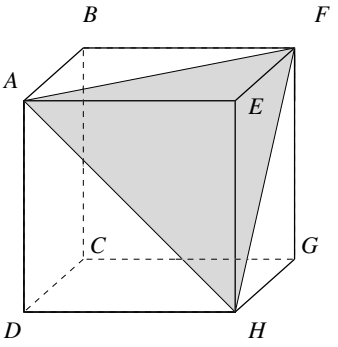
De même, on trouve que l'image de F est F' (milieu du segment $[CG]$). Comme le point H fait partie du sol, il est sa propre image. En reliant A', F' et G', on trouve l'ombre du triangle.

Remarquons que le triangle AFH est équilatéral. En effet, comme les segments $[AF]$, $[AH]$ et $[HF]$ sont des diagonales de carrés de même taille, ils ont même longueur. Cependant, son ombre n'est pas un triangle équilatéral, comme on peut le voir sur la vue aérienne du sol ci-dessous. Ceci est à rapprocher de la remarque faite dans l'introduction.



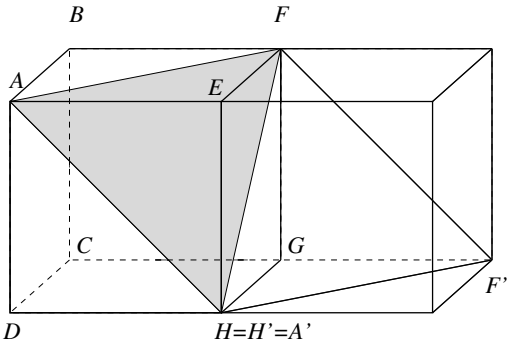
Projection de AFH parallèlement à AH

Cherchons l'ombre du triangle AFH sur le sol en supposant que le soleil donne dans la direction de la droite AH.



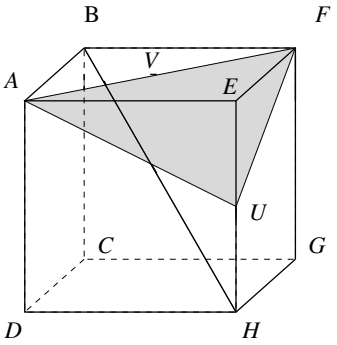
Remarquons que cette fois, le côté $[AH]$ du triangle est parallèle à la direction de projection. Les projections de A et H sont donc confondues. L'image du triangle est un segment de droite inclus à l'intersection des plans AFH et $CGDH$. Il reste à construire l'image de F.

Construisons un nouveau cube sur la face $EFGH$ afin que le point F puisse jouer le rôle de A dans la face $AEDH$. On trouve immédiatement que l'image de F est F' : $AFF'H$ est un parallélogramme.

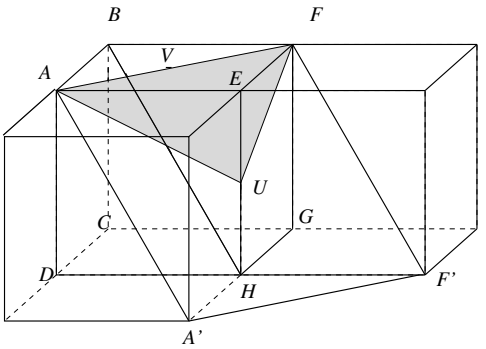


Projection de AUF parallèlement à BH

Cherchons l'ombre du triangle AUF sur le sol en supposant que le soleil éclaire dans la direction de la droite BH.

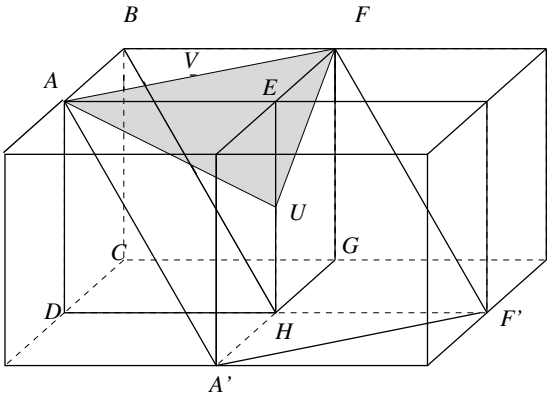


Nous allons faire jouer le rôle de B à A et F. Pour ce faire, nous allons construire de nouveaux cubes sur les faces $AEDH$ et $EFGH$. Par translation, on trouvera les images des points A et F, donc l'ombre de $[AF]$.



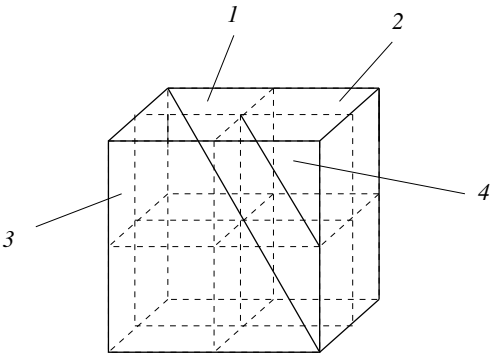
Notons V le milieu de $[AF]$ et remarquons que la droite BH est parallèle à la droite UV.

Centrons notre attention sur le plan diagonal BEH et plus particulièrement sur le triangle BEH. La droite VU joint les milieux des deux côtés de ce triangle. D'après le théorème de Thalès (dans le plan de ce triangle), VU est parallèle à BH.



Remarque 2.1.14 *Nous pouvons aussi visualiser ce résultat sur un réseau cubique plus fin que le premier, comme dans la figure ci-dessous à droite.*

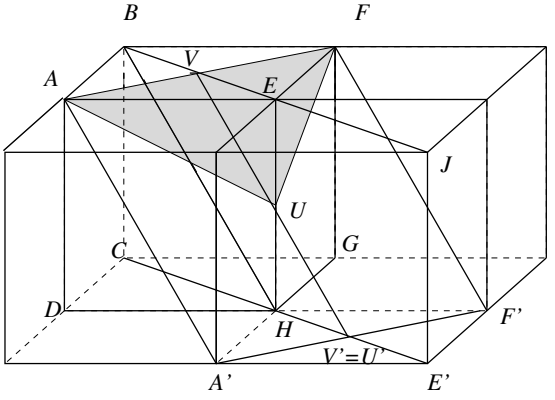
BH est la droite qui supporte la diagonale du petit cube 1. Par translation, cette diagonale est parallèle à la même diagonale du petit cube 4, qui n'est autre que UV.



Puisque $UV \,//\, BH$, les points U et V ont la même ombre.

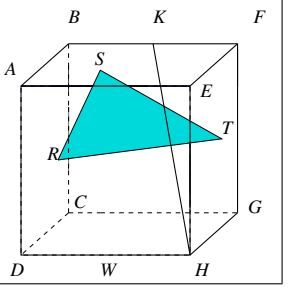
Or l'ombre de V, qui est le centre du carré $ABFE$, est le point V', centre du carré $A'HF'E'$. Cette ombre appartient donc à $[A'F']$.

Il en résulte que l'ombre du triangle AFU est le segment $[A'F']$.



2.1.5 Fiche n° 3 : Incidence et parallélisme (3)

Soit K le milieu du segment $[BF]$. Construire l'ombre au soleil du triangle RST sur le plan $CDGH$, le soleil étant dans la direction de la droite KH.



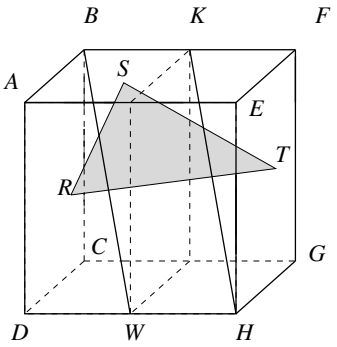
2.1.5.1 Solution commentée

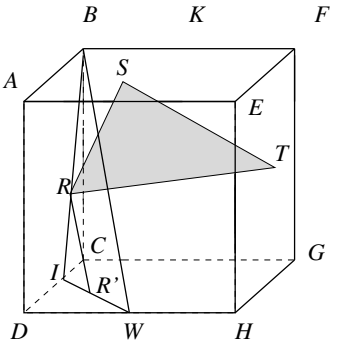
K est le milieu du segment $[BF]$. Cherchons l'ombre du triangle RST sur le sol en supposant que le soleil éclaire dans la direction de la droite KH, sachant que $R \in ABCD$, $S \in CBFG$ et $T \in EFGH$.

Dans les énoncés précédents, le triangle dont on cherchait l'ombre était toujours particulier en ce que ses sommets étaient soit des sommets du cube, soit situés au milieu d'une arête. Nous rencontrons ici le cas général : les sommets du triangle ne sont plus des points particuliers du cube. Nous le traiterons par deux méthodes différentes. La première repose sur la considération de sections du cube par des plans particuliers, la seconde exploite les propriétés associées à un réseau cubique.

Première méthode

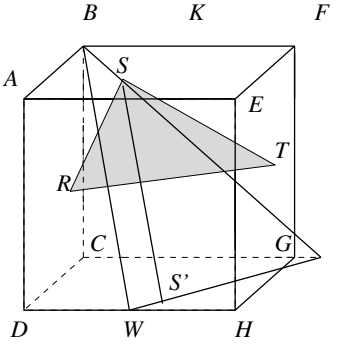
Notons W le milieu du segment $[DH]$. On remarque par translation que la droite BW est parallèle à la droite KH. Par conséquent, elles déterminent toutes deux la même projection parallèle.



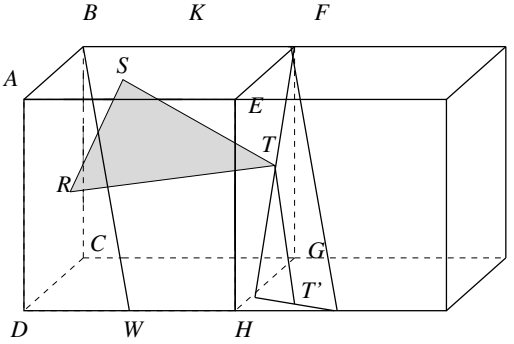


Les points B, R et W déterminent un plan, dont l'intersection avec la face $CDHG$ s'obtient de la manière suivante : comme B et R sont tous deux dans la face $ABCD$, la droite BR coupe la face $CDHG$ en un point I de l'arête CD. L'intersection demandée est le segment $[IW]$.

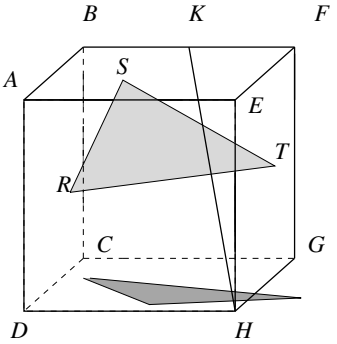
L'image R' de R est l'intersection de IW avec *la* parallèle à BW passant par R.



On procède de même pour le point S. On trouve S'.

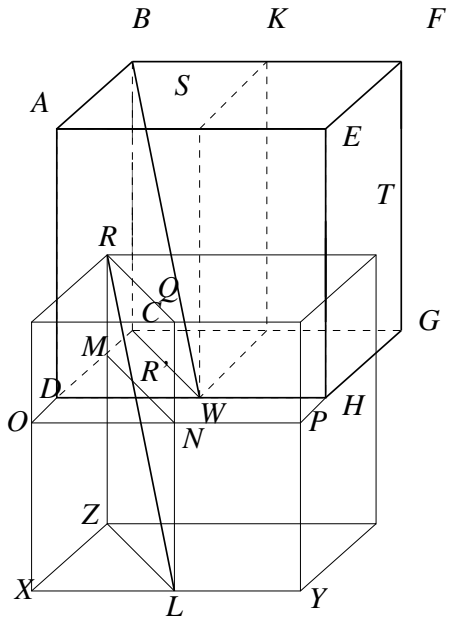


Les points T et B ne se trouvent pas dans une même face. Afin de trouver la projection de T, nous construisons un nouveau cube sur la face $EFGH$. Le point F joue le rôle de B, et en procédant à présent comme pour les deux autres points, on trouve T'.



Si nous rassemblons les précédents graphiques et joignons les points trouvés, nous voyons apparaître l'ombre du triangle RST.

Seconde méthode



Dessinons un nouveau cube, translaté de $ABCDEFGH$, de telle sorte que R joue le rôle de B. Si L est le milieu de $[XY]$, alors, par translation, RL est parallèle à BW. La projection de R sur le plan $CDHG$ est le point d'intersection de RL avec ce plan.
Or, le plan $RQLZ$ coupe la face $CDHG$ suivant MN, où M est sur CD et N est sur OP (on peut en déduire que MN est parallèle à CW).
L'intersection R' de MN avec RL est la projection du point R. On procède de même pour construire les projections de S et T.

2.1.5.2 Commentaires et prolongements

Dans cette construction, nous avons utilisé — subrepticement — le fait que si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre. Ce résultat est évidemment très intuitif et dans certaines circonstances, on pourrait être tenté d'en omettre la démonstration. Dans d'autres circonstances, il n'y aurait aucune raison de l'éviter. Nous allons donc énoncer et démontrer formellement ce résultat. Il repose notamment sur la chaîne de propositions qui suit.

Proposition 2.1.15 *Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.*

Soient α et β deux plans sécants, d leur intersection et x une droite parallèle tant à α qu'à β.

Si d n'était pas parallèle à x, d'après la proposition 2.1.12 (fiche 1), par d il ne pourrait passer qu'un seul plan parallèle à x, alors qu'ici nous en avons deux : α et β. Donc $d \,//\, x$.

■

Proposition 2.1.16 *Soient α, β et γ tels que $\alpha \,//\, \beta$ et $\beta \,//\, \gamma$. Alors $\alpha \,//\, \gamma$ (transitivité du parallélisme de plans).*

Supposons que α et γ ne sont pas parallèles. Notons alors x leur intersection. D'après la proposition précédente, toute droite du plan β devrait être parallèle à x, ce qui est évidemment impossible.

■

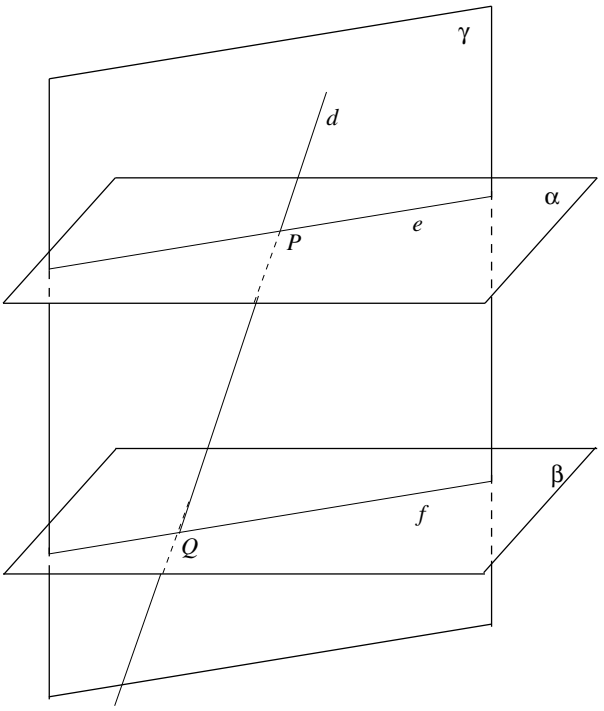
PROPOSITION 2.1.17 *Si α et β sont deux plans parallèles, tout plan γ qui coupe α coupe aussi β et les intersections $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont deux droites parallèles.*

D'après la transitivité du parallélisme de plans, le plan γ coupe le plan β dès qu'il coupe α et que α et β sont parallèles. Toute droite du plan α étant parallèle à β, la proposition 2.1.8 entraîne que les deux droites $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont parallèles.

■

PROPOSITION 2.1.18 *Si deux plans α et β sont parallèles, toute droite d qui coupe l'un coupe l'autre.*

Supposons que la droite d coupe le plan α en un point P. Soit γ un plan contenant d.



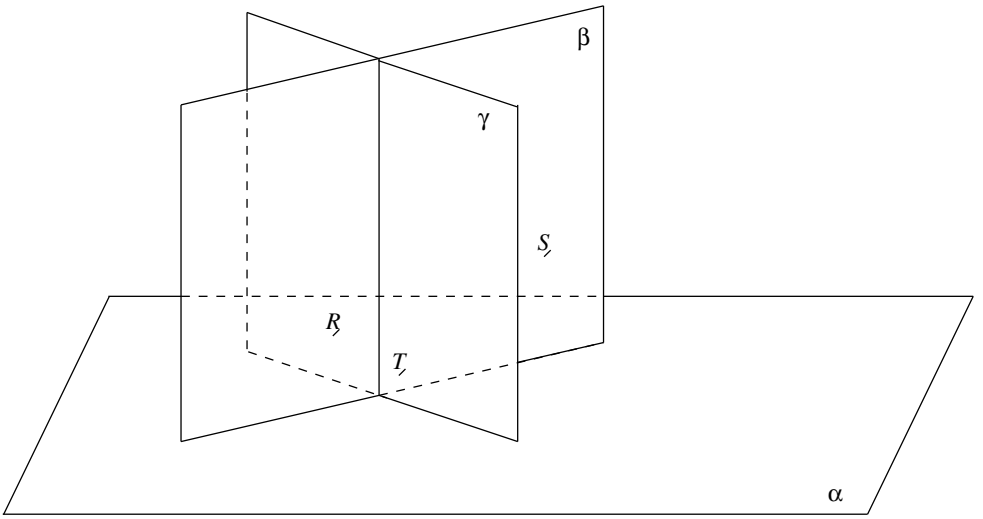
Le plan γ n'est pas confondu avec α (sinon d serait contenue dans α) et n'est pas parallèle à α (sinon d ne couperait pas α). Par conséquent, γ coupe α. Vu la proposition précédente, γ coupe aussi β et les deux droites $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont parallèles. La droite d étant dans le même plan γ et ayant un point commun avec $\alpha \cap \gamma$ coupe nécessairement aussi $\beta \cap \gamma$ et a donc un point commun avec γ.

REMARQUE 2.1.19 *Nous venons de décrire comment projeter un triangle sur un plan parallèlement à une direction donnée dans le cas où les sommets du triangle appartiennent aux plans des faces d'un cube et où le plan sur lequel on projette est lui-même une face du cube. Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que étant donnés un triangle RST et un plan α sur lequel on veut projeter RST, on peut toujours trouver un cube dont l'une des faces est dans le plan α et dont les faces (éventuellement prolongées) contiennent les points R, S et T.*

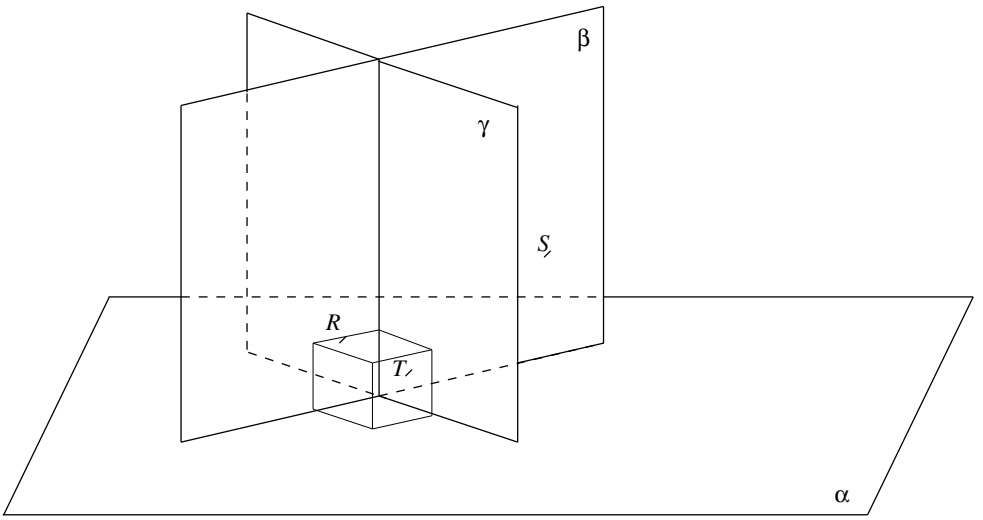
La construction s'organise de la manière suivante :

1. Construction d'un trièdre trirectangle adapté

Par R et S, on mène le plan β perpendiculaire au plan α. Par T, on mène le plan γ perpendiculaire à α et à β. Les trois plans α, β et γ forment des trièdres trirectangles.



2. Construction d'un cube



La distance d'un des points R, S ou T au plan α détermine, par exemple, l'arête d'un cube qui répond à la question. Un tel cube n'est pas unique ! Mais on remarque que la solution proposée est telle qu'un des côtés du triangle RST (dans notre cas, c'est $[RS]$) est entièrement dans le plan d'une face du cube.

2.1.6 Synthèse

A l'issue de l'étude des situations décrites dans les fiches 1 à 3, nous retiendrons les résultats suivants :

A propos des projections

Définition 2.1.2 : *On appelle projection d'un point P sur un plan α parallèlement à une droite d non parallèle à α le point d'intersection avec α de la parallèle à d passant par P.*

Proposition 2.1.13 : *La projection d'une droite sur un plan parallèlement à une droite est une droite (sauf dans le cas dégénéré où la direction de d est la direction de projection).*

A propos du parallélisme de droites

Proposition (Euclide) 2.1.6 : *Par tout point de l'espace passe une et une seule parallèle à une droite donnée.*

Proposition 2.1.10 : *Soient a, b, et c trois droites telles que a // b et b // c, alors a // c.* (Transitivité du parallélisme de droites.)

A propos du parallélisme de plans

Proposition 2.1.16 : *Soient α, β et γ tels que α // β et β // γ. Alors α // γ.* (Transitivité du parallélisme de plans.)

A propos du parallélisme de droites et plans

Proposition 2.1.7 : *Une droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan.*

Proposition 2.1.8 : *Si la droite a est parallèle au plan α, tout plan β passant par a et non parallèle à α coupe α suivant une parallèle à a.*

Proposition 2.1.12 : *Etant données deux droites non parallèles a et d, il existe un et un seul plan passant par a et parallèle à d.*

Proposition 2.1.15 : *Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.*

Proposition 2.1.17 : *Si α et β sont deux plans parallèles, tout plan γ qui coupe α coupe aussi β et les intersections $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont deux droites parallèles.*

Proposition 2.1.18 : *Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.*

Cette liste est strictement limitée a des propriétés importantes dont on a eu besoin pour traiter complètement les situations des fiches 1 à 3. D'autres résultats doivent venir s'ajouter aux résultats précédents. Ils peuvent assez aisément être illustrés dans des situations liées à un réseau cubique. Nous nous contenterons de mentionner les propositions suivantes.

PROPOSITION 2.1.20 *Si une droite a est parallèle à un plan α, et si $P \in \alpha$, la parallèle à a passant par P est entièrement contenue dans α.*

C'est un corollaire de la proposition 2.1.8 : le plan Pa coupe le plan α suivant une parallèle à a, qui est donc LA parallèle à a passant par P.

■

PROPOSITION 2.1.21 *Tout plan β parallèle à deux droites sécantes a et b d'un plan α est parallèle à α.*

Si α et β étaient sécants, d'après la proposition 2.1.15, les droites a et b sont toutes les deux parallèles à la droite $\alpha \cap \beta$, ce qui est impossible puisqu'elles sont sécantes.

■

PROPOSITION 2.1.22 *Par tout point P de l'espace passe un et un seul plan parallèle à un plan α donné.*

Vu la transitivité du parallélisme des plans de l'espace, l'unicité du plan cherché est évidente. Il suffit donc d'établir qu'il existe bien un plan β comprenant P et parallèle à α.

Considérons deux droites sécantes a et b du plan α et la parallèle d à a passant par P. D'après la proposition 2.1.12, il existe un (et un seul) plan β passant par d et parallèle à b. Ce plan β étant parallèle à deux droites sécantes de α est parallèle à α.

■

PROPOSITION 2.1.23 *Les projections sur un plan α de deux droites parallèles a et b, parallèlement à une droite d sont, sauf si $a \mathbin{/\!/} d \mathbin{/\!/} b$, deux droites parallèles.*

En ces projections sont les intersections avec α des plans parallèles à d passant par a et b, et ces deux plans sont parallèles.

■

On illustre facilement sur un réseau cubique le fait que deux droites non parallèles peuvent très bien avoir comme projections des droites parallèles.

REMARQUE 2.1.24 *D'autres propriétés encore pourraient être énoncées. Par exemple, de la proposition 2.1.20 et de la transitivité du parallélisme de droites, on déduit trivialement que si deux droites a et b sont parallèles, et si a est parallèle à un plan α, alors b est parallèle à α. Par contraposition, on trouve alors que si deux droites a et b sont parallèles, tout plan α qui coupe a coupe aussi b.*

Nous ne croyons pas formateur d'accumuler des résultats tellement proches les uns des autres et d'encombrer ainsi la mémoire des élèves en leur donnant l'impression d'une théorie lourde et complexe. Ne vaut-il pas mieux leur apprendre à organiser leurs connaissances en ne retenant qu'un petit nombre d'énoncés à partir desquels on peut aisément retrouver tous les autres ?

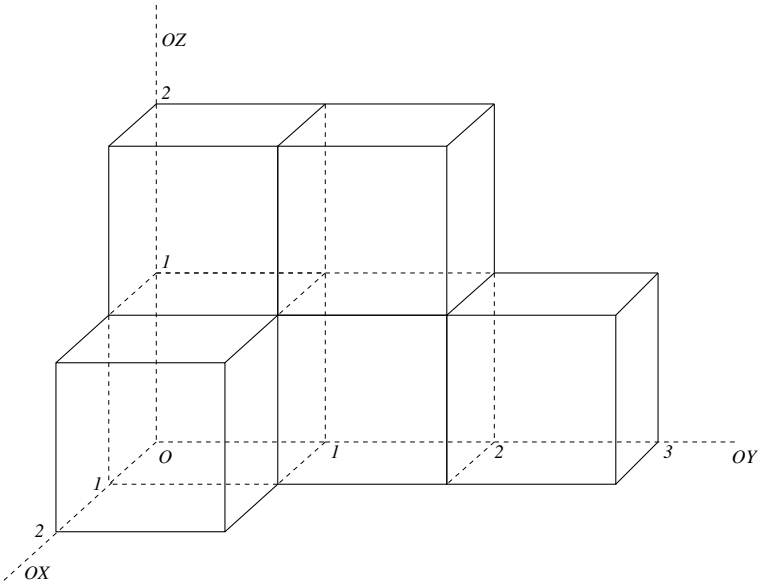
2.2. La géométrie vectorielle élémentaire

2.2.1 Introduction

L'objectif des fiches qui suivent est de familiariser l'élève avec le calcul vectoriel et la notion de linéarité. A partir des réseaux cubiques employés dans les fiches précédentes qui induisent un repère orthonormé, nous allons déduire les propriétés du calcul vectoriel, en particulier la notion de combinaison linéaire.

Prenons un réseau cubique, et intéressons-nous à un cube en particulier (bien choisi). Un des sommets de la face inférieure est appelé *origine* et noté O. Les droites supportant les côtés du cube passant par O sont les *axes*. Nous les différencions en les baptisant OX, OY et OZ.

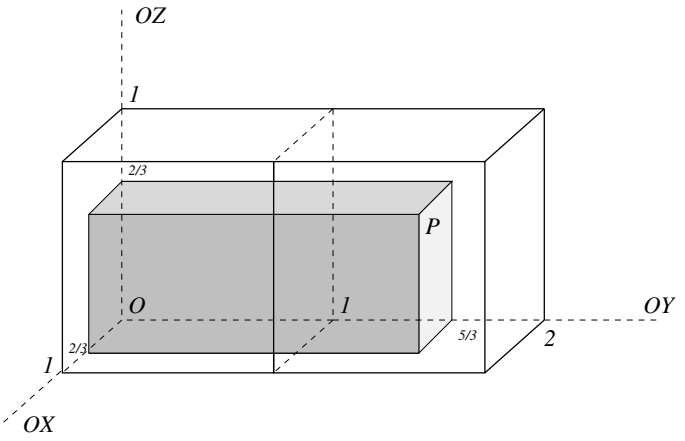
En prenant pour unité le côté d'un cube, nous associons un nombre réel à chaque point de l'axe OX. Nous faisons de même pour les deux autres axes.



Grâce à ces indications, nous pouvons repérer chaque point P du réseau par un triplet de nombres :

- Le premier de ceux-ci fixe la projection du point sur l'axe X parallèlement au plan YZ (nous savons par la fiche N ° 1 qu'il n'existe qu'un et un seul plan parallèle au plan YZ qui passe par le point considéré ; cette projection est donc unique). Nous l'appellons *abscisse* de P.
- Le deuxième nombre fixe la projection du point P sur l'axe Y parallèlement au plan XZ. C'est l'*ordonnée* de P
- Enfin, le troisième nombre fixe la projection de P sur l'axe Z parallèlement au plan XY. C'est la *hauteur* de P

Prenons par exemple le point P suivant.



Ses projections sur les axes X, Y et Z sont respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Nous adoptons la notation suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Nous identifions donc le point P à la colonne de ses *coordonnées cartésiennes*. Le choix de cette notation n'est pas innocent : il permet de justifier la notation $P+Q$ utilisée pour désigner le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sommets sont P, O et Q.

Dans la suite, nous étudions les projections parallèles en termes de coordonnées. A partir de là, nous construisons pas à pas les équations vectorielles et cartésiennes des droites et des plans de l'espace.

Nous avons vu dans les activités de la fiche n ° 1 des méthodes qui nous permettent de construire des projections de points. Ces méthodes constitueront le point de départ des fiches de cette section.

2.2.2 Fiche n° 4 : Projections et coordonnées

On donne les points $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

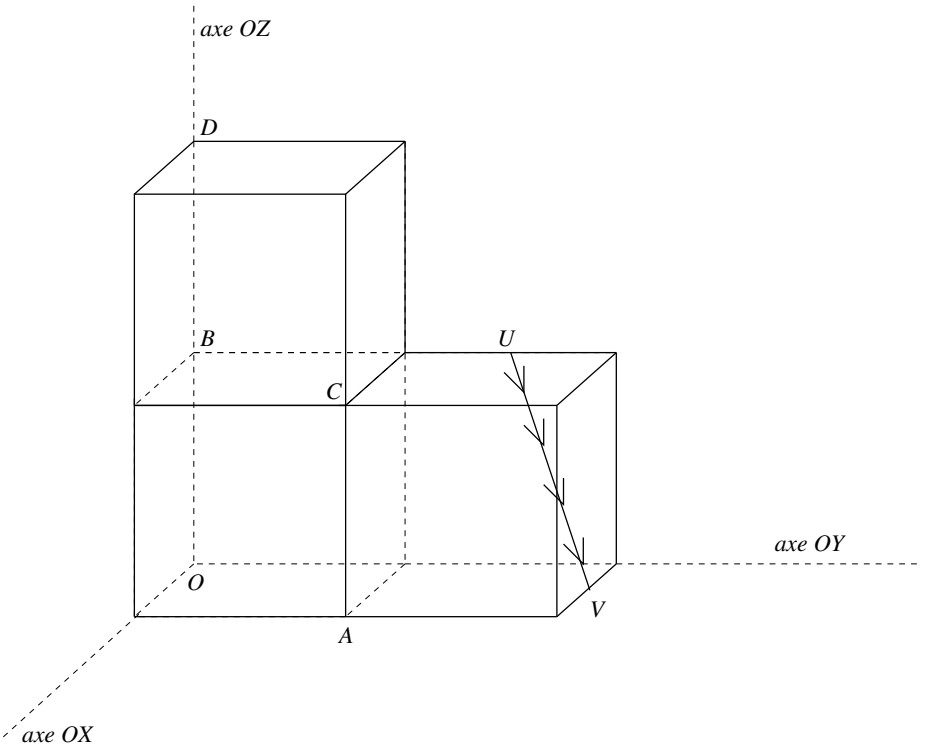
Calculer les coordonnées des projections sur le plan OXY parallèlement au segment $[UV]$ des points suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une formule qui calcule les coordonnées de la projection d'un point quelconque.

2.2.2.1 Solution commentée

Avant toute chose, visualisons la situation sur un réseau cubique.



Le point A est confondu avec sa projection A' car il se trouve dans le plan OXY, donc

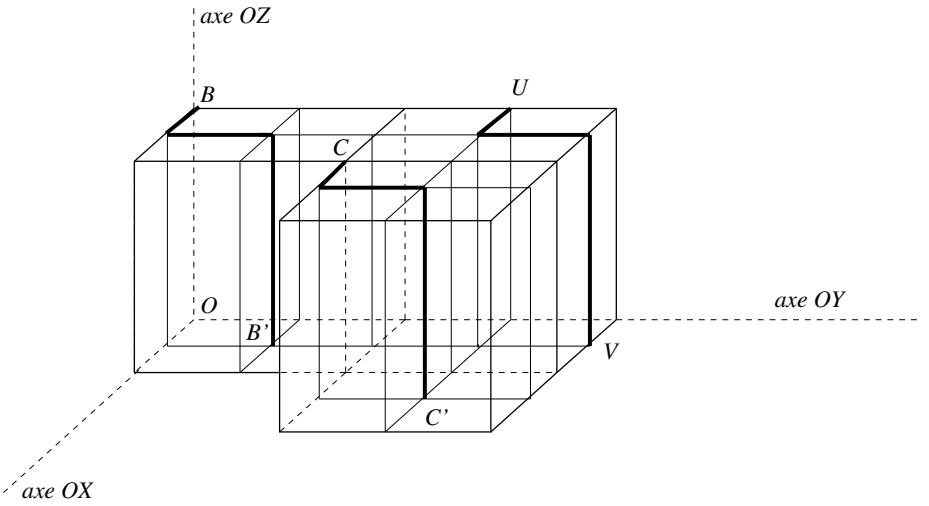
$$A' = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Regardons à présent les points B et C. Ils ont même hauteur que le point U, c'est-à dire 1. Construisons leurs projections B' et C', à l'aide de translations appropriées du prisme de diagonale $[UV]$(cfr. fiche N ° 3 « Projection de RST parallèlement à KH », seconde méthode).

Cette construction implique immédiatement que les coordonnées de B' et C' s'obtiennent *à chaque fois* à partir d'un même procédé, encodé dans le prisme de diagonale $[UV]$:

- Avancer de $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe OX
- Avancer de $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe OY
- Descendre de 1 (c'est-à-dire avancer de -1) parallèlement àl'axe OZ

Ce procédé s'applique à tous les points de hauteur 1.

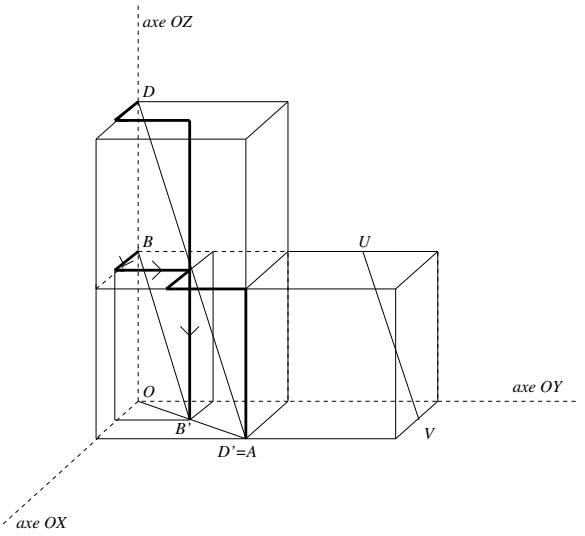


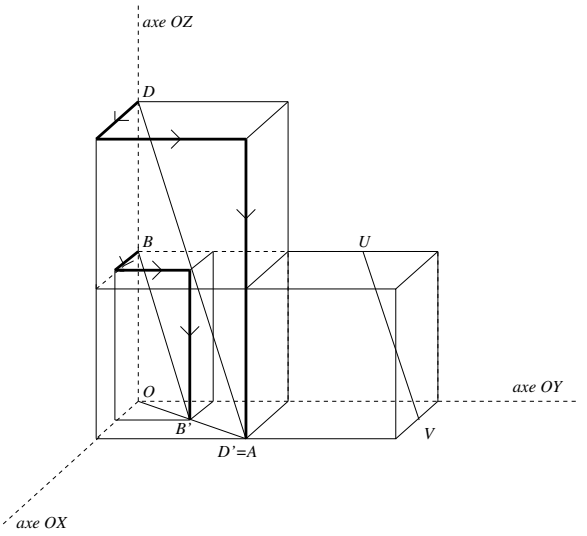
Il s'agit maintenant d'étudier comment ce procédé peut se généraliser à d'autres points que ceux de même hauteur que U.

Commençons par le point D. Une situation similaire a déjà été rencontrée dans la fiche N ° 2 (Projection de AUF parallèlement à BH), et il est facile d'en déduire que la projection D' de D coïncide avec A (ou A').

On peut atteindre la même conclusion en observant la similitude des pavés de diagonale $[BB']$ et de diagonale $[DA]$. Le point D étant de hauteur 2, sa projection D' s'obtient par le même procédé que celui dégagé plus haut, *pourvu qu'il soit répété deux fois*. Cette conclusion subsiste pour tous les points de hauteur 2, c'est-à-dire de même hauteur que D.

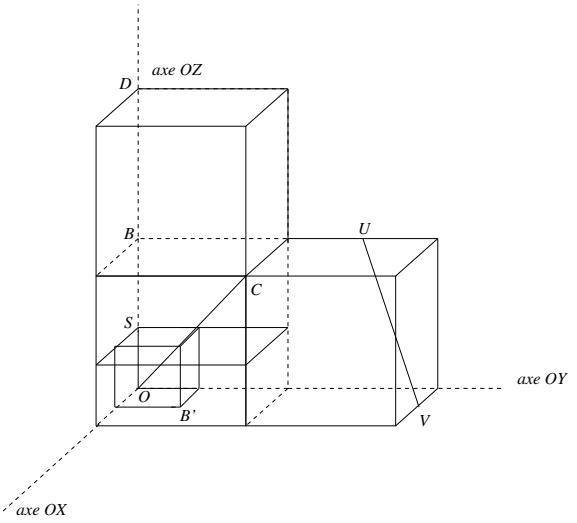
Au total, on passe de D à D' en avançant de 1 parallèlement à OX, de 1 parallèlement à OY et en descendant de 2 (c'est-à-dire en avançant de -2) parallèlement à OZ.





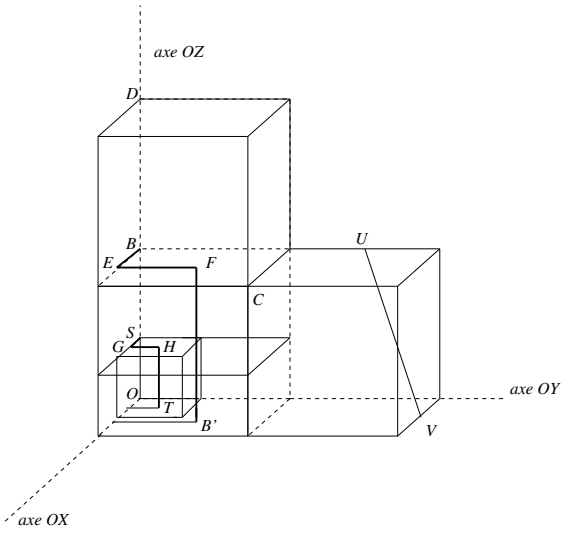
Il reste à traiter le cas d'un point S de hauteur z quelconque (et donc non nécessairement entière), mais comme on s'en aperçoit vite, cela ne présente plus aucune difficulté.

Commençons par le cas où le point S appartient à l'axe OZ.



L'homothétie de centre O et de rapport z amène le *cube unité* de diagonale $[OC]$ sur un cube dont S est un sommet.

Remarque 2.2.1 *Si la notion d'homothétie de l'espace est inconnue des élèves, il est possible de présenter le raisonnement ci-dessus en se bornant à évoquer le théorème de Thalès dans les trois plans OBE, OEF et OFB'. C'est aussi une bonne occasion de parler d'homothétie.*



L'homothétie envoie le prisme de diagonale $[BB']$ sur le prisme de diagonale $[ST]$. Il s'ensuit, par le même raisonnement que précédemment, que la projection du point S est le point T.

On passe de S à T en avançant de $\frac{z}{2}$ parallèlement à OX, de $\frac{z}{2}$ parallèlement à OY, puis en descendant de z parallèlement à OZ.

On en déduit, toujours comme précédemment, la projection d'un point quelconque P, de hauteur z : elle s'obtient à partir de P par le même chemin qui mène de S à T.

En conclusion, la projection parallèlement à UV du point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur le plan OXY est donnée par la formule :

$$\text{proj}_{OXY}^{/\!/UV}(P) = \begin{pmatrix} x + z.\frac{1}{2} \\ y + z.\frac{1}{2} \\ z + z.(-1) \end{pmatrix}$$

2.2.2.2 Prolongements : points, translations et triplets de nombres.

Dans la formule ci-dessus, la notation $\text{proj}_{OXY}^{/\!/UV}$ désigne le « projecteur sur le plan OXY parallèlement à la direction de la droite UV ». Cette formule a une écriture remarquablement homogène : on ajoute terme à terme le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et le triplet $\begin{pmatrix} z.\frac{1}{2} \\ z.\frac{1}{2} \\ z.-1 \end{pmatrix}$.

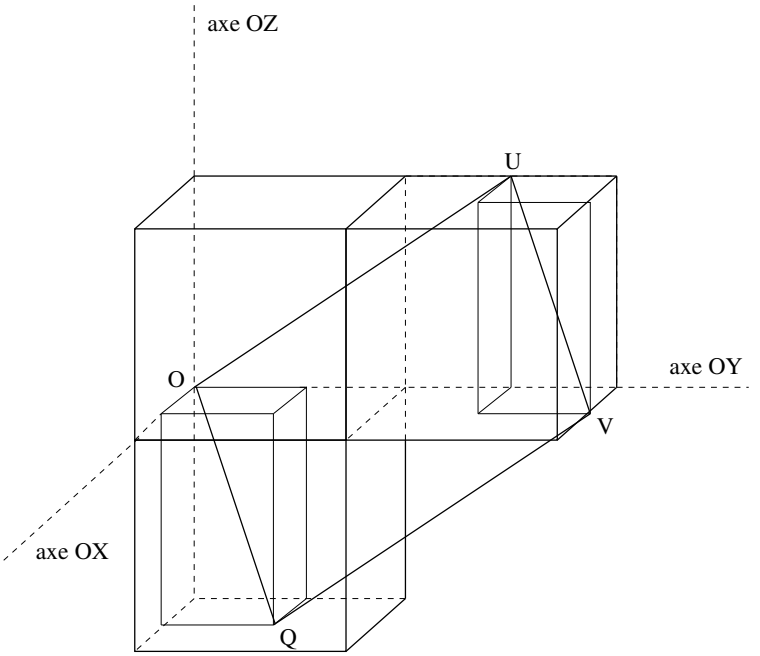
Il s'agit de donner un sens géométrique à une écriture aussi remarquable. Pour tous les points P de hauteur 1, on a :

$$\text{proj}_{OXY}^{/\!/UV}(P) = \text{proj}_{OXY}^{/\!/UV} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1.\frac{1}{2} \\ y + 1.\frac{1}{2} \\ 1 + 1.(-1) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Le procédé géométrique correspondant est une *translation*, décrite par l'addition, terme à terme, du triplet $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, un triplet de nombres réels reçoit une nouvelle interprétation : celle d'opérateur de translation. Comment relier cette nouvelle interprétation à celle, première, de coordonnées d'un point ?

Notons Q le *point* de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Il y a deux observations à faire.

1. Si on situe Q, U et V sur la même figure, la considération des pavés de diagonale $[UV]$ et de diagonale $[OQ]$ montre que $OUVQ$ est un parallélogramme.
   La translation qui envoie U sur V est donc déterminée par le seul point Q.



2. Les coordonnées de U et V, $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ déterminent par soustraction celles du point Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ 2 - \frac{3}{2} \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

De ces deux observations, il résulte que les deux interprétations d'un triplet de nombres réels que suggérait la formule (2.1) sont équivalentes.

Mais — et c'est là son principal intérêt — *cette équivalence étant établie, il y a alors moyen d'écrire les formules (2.1) et (2.2) sous forme bien plus économique, en termes d'addition ou de soustraction de (coordoonnées) de points :*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = V - U$$

et

$$\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = \begin{pmatrix} x + 1.\frac{1}{2} \\ y + 1.\frac{1}{2} \\ 1 + 1.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = P + Q = P + V - U$$

Dans le même ordre d'idées, il est facile d'observer que la multiplication par un même nombre k de toutes les coordonnées d'un point correspond géométriquement à l'application à ce point d'une homothétie de centre O et de rapport k.

Cela permet de récrire la formule (2.1) sous la forme condensée

$$\boxed{\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = P + z.(V - U)}$$

où z est la hauteur de P.

Cette formule contient à la fois le procédé algébrique de calcul de $\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P)$, et la signification géométrique de ce procédé (« on fait descendre P le long de la direction de UV de telle sorte qu'on arrive à la hauteur 0 »).

Remarque 2.2.2 *Le fait que z soit la hauteur de P dans la formule ci-dessus provient de ce que la 3^e coordonnée de $V - U$ est -1, car nous avons vu dans cette fiche que la méthode pour descendre d'un étage se reproduit pour n'importe quelle hauteur. C'est une homothétie de rapport z qui nous a permis de ramener la situation générale à celle du cube de hauteur 1.*

2.2.3 Fiche n° 5 : Équations vectorielles d'une droite

On considère le mÛme projecteur qu'à la fiche N ° 4 : la direction de projection est celle de la droite UV, le plan de projection est le plan OXY.
De plus, $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
a. Déterminer tous les points ayant même projection que A.
b. Déterminer les coordonnées de tous les points se projetant sur un point quelconque du plan OXY.
c. Plus généralement, étant donné un point quelconque de l'espace, comment déterminer les coordonnées de tous les points ayant même projection que lui ?

2.2.3.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Suivant les axiomes et les définitions rappelés dans l'introduction de la section A, l'ensemble de points en question est la droite d_A parallèle à UV et contenant le point A.

Cette droite d_A est appelée *droite projetante* du point A.

Si le point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à d_A, les conclusions de la fiche N ° 4 donnent immédiatement :

$$A = M + z.(V - U)$$

Puisque $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$M = A - z.(V - U)$$

Utilisant la lettre k à la place de z, nous pouvons écrire l'équivalence

$$\boxed{M \in d_A \iff M = A + k.(U - V)}$$

Nous dirons que $M = A + k.(U - V)$ est *l'équation vectorielle* de d_A.

Réponse à la question b

Le principe sera le même qu'à la question a, mais cette fois, nous ne connaissons plus les coordonnées du point sur lequel nous projetons.

Notons $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point G situé dans le plan OXY et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point quelconque M de sa droite projetante d_G.

Nous avons directement :

$$\boxed{M = G + k.(U - V)}$$

Réponse à la question c

M et N sont deux points quelconques de la droite projetante de G, il existe des réels k_1 et k_2 tels que :

$$M = G + k_1.(U - V)$$
$$N = G + k_2.(U - V)$$

d'où

$$M - N = (k_1 - k_2)(U - V)$$

Cette égalité exprime en termes vectoriels que la droite projetante de G est parallèle à la droite UV.

Mais cette égalité ne fait plus référence au point G, de telle sorte que nous pouvons l'interpréter de la manière suivante :

Quel que soit le point N de l'espace, la droite projetante de N est l'ensemble des points M tels qu'il existe l réel avec

$$M = N + l.(U - V)$$

2.2.3.2 Commentaires et prolongements

1. Nous venons d'élaborer l'équation vectorielle d'une droite projetante, mais il est remarquable que nous pouvons à présent abandonner le qualificatif « projetant ». Toute droite MN est en effet projetante pour tout projecteur parallèlement à MN. Nous retiendrons donc de ce qui précède l'énoncé suivant :

> *Soit UV une droite et N un point. Un point M appartient à la parallèle à UV passant par N si et seulement s'il existe un réel l tel que $M = N + l.(U - V)$*

Dans la formule $M = N + l.(U - V)$, nous pouvons interpréter le réel l comme étant l'abscisse du point M sur la droite parallèle à UV passant par le point N, pour autant que le point N soit choisi comme point d'abscisse 0 et $N + U - V$ comme point d'abscisse 1.

2. Si nous notons Q le point $N + U - V$, la droite parallèle à UV passant par N est la droite NQ, et l'équation vectorielle de cette droite s'écrit :

$$M = N + l.(Q - N)$$

Cette notation, d'une part, fait mieux apparaître le fait qu'une droite est déterminée par deux points et d'autre part remet en mémoire les deux interprétations d'un triplet de nombres, comme point et comme translation.

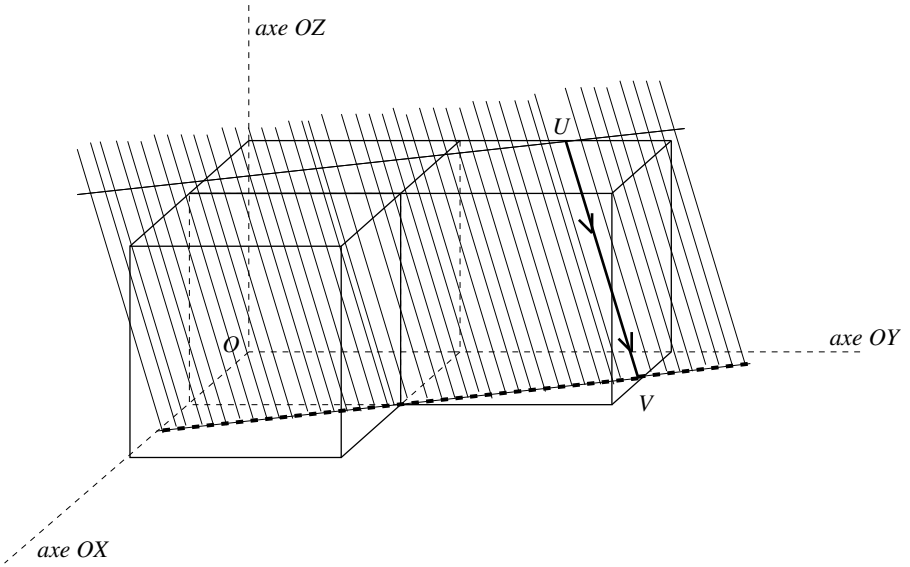
2.2.4 Fiche n° 6 : Équations vectorielles d'un plan

Dans cette fiche également, nous conservons la situation de la fiche N ° 4.
a. Déterminer les cordonnées de tous les points dont la projection est située sur la droite AV.
b. Soient N, P et Q trois points distincts de l'espace. On considère la droite d passant par N et parallèle à PQ. Trouver l'équation vectorielle du plan passant par d et parallèle à UV.

2.2.4.1 Solution commentée

Réponse à la question a

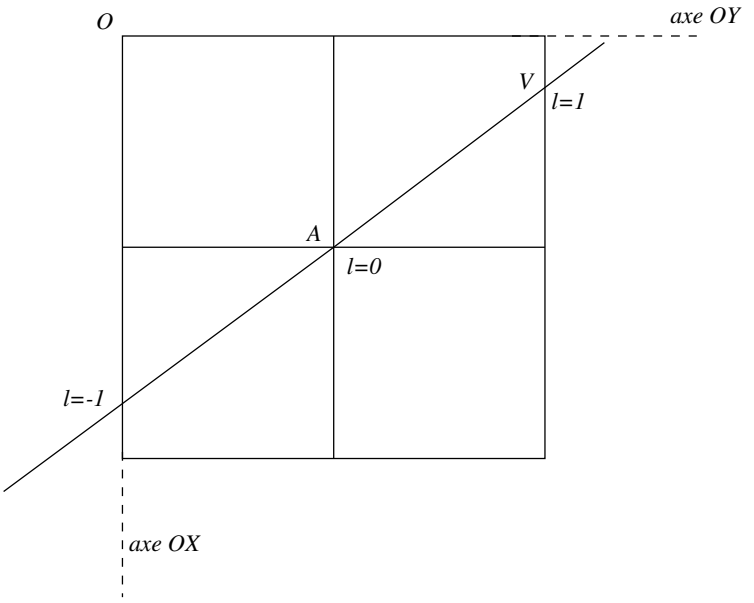
La droite AV est distincte de la droite UV, les activités rencontrées dans le thème A ont montré que l'ensemble des points recherchés est un plan parallèle à la droite UV, et contenant la droite AV. Ce plan est appelé *plan projetant* de la droite AV.



L'idée qui permet de résoudre le problème est de faire pour tous les points situés sur la droite AV ce qui a déjà été réalisé dans la fiche N ° 5 pour un seul point du plan OXY.

Mais cela nécessite au préalable de décrire l'ensemble des coordonnées des points de la droite AV. Nous pouvons appliquer la remarque finale de la fiche N ° 5 : la droite AV est la droite passant par A et parallèle à AV. Par conséquent, un point Q' appartient à AV si et seulement s'il existe un réel l tel que $Q' = A + l.(V - A)$

Observons que pour $l = 0$ (respectivement $l = 1$), on obtient $Q' = A$ (respectivement $Q' = V$).



Nous pouvons à présent en revenir à l'idée évoquée plus haut. Toujours d'après les résultats de la fiche N ° 5, et quel que soit le point Q' situé sur la droite AV :
un point M appartient à la droite projetante de Q' si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que

$$M = Q' + k.(U - V)$$

Dès lors, le plan projetant de la droite AV est l'ensemble des points M pour lesquels il existe deux nombres réels k et l tels que :

$$M = A + l.(V - A) + k.(U - V)$$

Remarquons que pour $l = 0$, nous retrouvons l'équation de la droite d de la question a.

Réponse à la question b

On sait que la droite d a pour équation $M_1 = N + l.(Q - P)$. On sait aussi que la parallèle à UV passant par N a pour équation $M_2 = N + k.(V - U)$.

Le plan α défini par ces deux droites sécantes (puisqu'elles ont le point N en commun) est le plan voulu. Il a pour équation vectorielle $M_3 = N + l.(Q - P) + k.(V - U)$.

Nous pouvons faire jouer un rôle particulier au point N, intersection des deux droites qui déterminent le plan α, en choisissant des points A et B, respectivement situés sur d et sur la parallèle à UV passant par N et vérifiant les égalités suivantes : $A - N = Q - P$ et $B - N = V - U$, on peut alors écrire l'équation vectorielle du plan sous la forme $M_3 = N + l.(A - N) + k.(B - N)$.

2.2.4.2 Commentaires et prolongements

L'équation $M = N + l.(A - N) + k.(B - N)$ caractérise les points du plan α. Nous entendons par là qu'est valide l'équivalence logique

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \exists l, k : M = N + l.(A - N) + k.(B - N)$$

que l'on résume par l'expression consacrée « $M = N + l.(A - N) + k.(B - N)$ est une *équation vectorielle* de α »

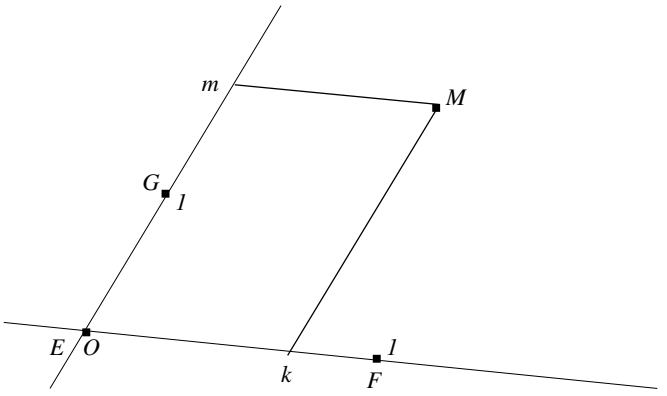
L'équation vectorielle ci-dessus montre aussi la possibilité de construire un point quelconque M du plan α en appliquant au point N successivement les deux translations $l.(A - N)$ et $k.(B - N)$.

D'une façon générale, n'importe quel plan déterminé par trois points E, F et G admet une équation vectorielle, du type :

$$M = E + k.(F - E) + m.(G - E)$$

En effet, on peut toujours considérer le plan EFG comme étant le plan projetant de la droite EF parallèlement à FG sur n'importe quel plan passant par EG.

On dit que $k.(F - E) + m.(G - E)$ est une *combinaison linéaire* de $F - E$ et $G - E$.



Dans le repère constitué de l'origine E et de ces deux translations, nous pouvons interpréter (k, m) comme les coordonnées du point M dans le plan EFG pour autant que les points F et G aient respectivement les coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

2.2.5 Synthèse

A l'issue de l'étude des situations décrites dans les fiches 4 à 6, nous retiendrons les constructions et les résultats suivants :

A propos des opérations sur les coordonnées

Deux opérations ont été définies sur les colonnes de coordonnées :

- L'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$

- La multiplication par un nombre réel

$$k.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a \\ k.b \\ k.c \end{pmatrix}$$

Les deux opérations s'effectuent composante par composante. Elles jouissent des propriétés usuelles de l'addition de deux réels et de la multiplication d'un réel par un réel fixé, à savoir :

- Associativité de l'addition
- Existence d'un neutre (ici, il s'agit de la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)
- Existence pour tout élément $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un opposé $\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$
- Commutativité de l'addition
- Associativité de la multiplication par un réel
- Distributivité de la multiplication par un réel sur l'addition
- Distributivité de l'addition sur la multiplication par un réel
- La multiplication par 1 est l'identité

On peut figurer les calculs sur les points représentant les colonnes de coordonnées, en leur appliquant les règles de calcul rappelées ci-dessus.

Dans ce contexte, on appelle translation définie par le point $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ l'opération qui consiste à additionner à un point quelconque le point A.

De même, si k est un nombre réel, on appelle homothétie de rapport k l'opération qui consiste à multiplier un point quelconque par k.

A propos de vecteurs

Ces définitions et règles de calculs s'appliquent à d'autres objets mathématiques que les seules colonnes de coordonnées.

On appelle *vecteur* n'importe quel objet mathématique porteur d'un calcul linéaire, c'est-à-dire d'une addition et d'une multiplication par un réel, ces opérations respectant les propriétés décrites ci-dessus.

On appelle *combinaison linéaire* d'un ensemble fini de vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ n'importe quelle expression du type :

$$a_1.v_1 + a_2.v_2 + \ldots + a_n.v_n$$

où les coefficients a_i sont des réels.

Ainsi, l'espace des colonnes est un exemple d'espace de vecteurs, ou encore d'espace vectoriel. Par extension, on qualifie de *vectoriel* tout objet, propriété, équation défini en terme de vecteurs.

A propos de l'équation vectorielle d'une droite

- L'équation vectorielle d'une droite d passant par les deux points distincts A et B s'écrit :

  $$X \in d \iff \exists k \in \mathbb{R} : X = A + k.(B - A)$$

  On dit alors que d est munie du repère (A, B) au sens où le point A est obtenu pour la valeur $k = 0$ du paramètre et est appelé *origine* du repère, et le point B est obtenu pour la valeur $k = 1$ du paramètre.

  La valeur de k correspondant à un point X est appelée *abscisse* du point X dans le repère (A, B).

  Le point $B - A$ est appelé *vecteur directeur* de la droite AB.
- L'équation vectorielle d'une droite d passant par le point A et parallèle à la droite CD (avec $C \neq D$) :

  $$X \in d \iff \exists k \in \mathbb{R} : X = A + k.(D - C)$$

A propos de l'équation vectorielle d'un plan

L'équation vectorielle d'un plan α passant par les trois points distincts A, B et C non alignés s'écrit :

$$X \in \alpha \iff \exists k, l \in \mathbb{R} : X = A + k.(B - A) + l.(C - A)$$

On dit alors que α est muni du repère (A, B, C) au sens où le point A est obtenu pour les valeurs $k = 0$ et $l = 0$ des paramètres et est appelé *origine* du repère. Quant aux points B et C,ils sont respectivement obtenus pour les valeurs $k = 1$, $l = 0$ et $k = 0$, $l = 1$.

Les valeurs de k et l correspondant à un point X sont appelées les *coordonnées* du point X dans le repère (A, B, C).

2.3. Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires

2.3.1 Introduction

L'étude des systèmes d'équations linéaires n'est vraisemblablement pas celle qui pose le plus de problèmes aux enseignants. La théorie en est bien connue et ne nécessite guère de commentaires. Nous avons donc opté dans ces fiches pour une présentation pratique, à travers des situations géométriques. De façon plus précise, nous rencontrerons des systèmes d'équations linéaires à de nombreuses reprises, via des problèmes de détermination d'intersections de droites et plans. Ce sera aussi l'occasion d'introduire l'équation cartésienne d'un plan.

Si cette façon de faire a l'avantage d'intégrer l'étude de l'algèbre linéaire à celle de la géométrie, elle a le gros inconvénient de limiter la taille des systèmes d'équations rencontrés à 2 ou 3. Or, dans la pratique quotidienne des applications, les systèmes d'équations de taille nettement plus élevée sont monnaie courante. Il nous semble donc important que les élèves soient durant leur scolarité mis au moins une fois en présence d'un système de taille appréciable.

Faute de temps, nous n'avons pu rédiger une application significative qui nécessite la manipulation de systèmes d'équations de taille supérieure à 2 ou 3. Le lecteur pourra se reporter à la bibliographie, notamment à un récent document de la Commission Pédagogique de la SBPMef, [8].

Le travail avec les équations linéaires à trois inconnues ne peut guère être séparé de celui avec les fonctions linéaires, c'est-à-dire les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Ces fonctions s'introduisent naturellement via la considération des projecteurs sur une droite parallèlement à un plan. C'est à ce sujet que sont consacrées les fiches 10 à 12.

Comme déjà signalé plus haut, le choix des sujets abordés dans les fiches qui suivent n'a rien d'exhaustif, et peut donc être considéré comme arbitraire. Par exemple, les systèmes d'équations cartésiennes permettant de décrire une droite ont été directement envisagés sous la forme la plus générale possible. Il aurait peut-être été plus classique de partir du système d'équations cartésiennes : $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ (avec $l.m.n \neq 0$) qui décrit une droite passant par le point $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et qui s'obtient immédiatement à partir de l'équation vectorielle de cette droite. Le fond du problème n'en aurait pas été modifié.

2.3.2 Fiche n° 7 : Point de percée d'une droite dans un plan

Soient les points suivants : $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a. Trouver le point de percée de la droite CD dans le plan OXY (le sol).
b. Trouver le point de percée de la droite CD dans le plan EFG.
c. Trouver le point de percée de la droite HI dans le plan EFG.
d. Trouver le point de percée de la droite JK dans le plan EfG.

2.3.2.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Il s'agit d'appliquer les résultats des fiches N ° 4 et N ° 5. L'équation vectorielle de la droite CD est :

$$\begin{aligned} P &= C + k.(D - C) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} 0-1 \\ 5-3 \\ 6-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

P est le point de percée de CD dans le sol si et seulement si sa hauteur vaut 0, ainsi :

$$P \in OXY \iff 5 + k = 0 \iff k = -5$$

D'où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 5. \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 3-10 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse à la question b

D'après les conclusions de la fiche N ° 6 :

$$M \in EFG \iff \exists r, s \in \mathbb{R} : M = E + r.(G - E) + s.(F - E)$$

Les points M de ce plan ont donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6.r \\ 4.r + s \\ 2.r + 2.s \end{pmatrix}$ où r et s sont des paramètres réels. Le point de percée cherché est l'un de ces points M.

Or, par la fiche N ° 5, nous savons que :

$$\begin{aligned} M \in CD \iff \exists q \in \mathbb{R} : M &= C + q.(D - C) \\ M &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + q. \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 - q \\ 3 + 2.q \\ 5 + q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afin de trouver le point de percée de la droite CD dans le plan EFG, nous devons trouver des réels r, s et q tels que :

$$\begin{cases} 1 - q = 6.r \\ 3 + 2.q = 4.r + s \\ 5 + q = 2.r + 2.s \end{cases}$$

La 1^{re} équation nous donne $r = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.q$ de sorte qu'en remplaçant r par cette expression dans les deux équations suivantes, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} r = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.q \\ 3 + 2.q = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}.q + s \\ 5 + q = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.q + 2.s \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} r = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}.q \\ s = \frac{8}{3}.q + \frac{7}{3} \\ s = \frac{2}{3}.q + \frac{7}{3} \end{cases}$$

Les deux dernières équations impliquent $q = 0$, d'où résultent $r = \frac{1}{6}$ et $s = \frac{7}{3}$. Le point de percée cherché est donc le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 6.\frac{1}{6} \\ 4.\frac{1}{6} + \frac{7}{3} \\ 2.\frac{1}{6} + 2.\frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le point C.

Dans la fiche N ° 6, nous avons rencontré une condition nécessaire et suffisante pour que le point C fasse partie du plan défini par les trois points E, F et G.

$C - E$ doit être une combinaison linéaire de $F - E$ et $G - E$. Comme $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous voyons que C est une combinaison linéaire des points F et G. Plus précisément, $C = \frac{1}{6}.G + \frac{7}{3}.F$.

Réponse à la question c

$$\begin{aligned} M \in HI \iff \exists u \in \mathbb{R} : M &= I + u.(H - I) \\ M &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u. \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 6 \\ 5.u \\ -6 + 10.u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Essayons de trouver des réels r, s et u tels que :

$$\begin{cases} 6 = 6.r \\ 5.u = 4.r + s \\ -6 + 10.u = 2.r + 2.s \end{cases}$$

La 1^{re} équation nous donne $r = 1$. En remplaçant r par 1 dans les deux autres équations, nous obtenons deux équations équivalentes : $5u = 4 + s$. Le système se réduit donc à :

$$\begin{cases} r = 1 \\ u = \frac{4+s}{5} \end{cases}$$

Il nous reste deux équations pour trois inconnues. La valeur de r étant déterminée, nous pouvons choisir à notre guise l'une des deux inconnues restantes.

Si $s = 0$, alors $u = \frac{4}{5}$, si $s = 1$, alors $u = 1$, etc. Ou encore, si $u = 0$, alors $s = -4$, si $u = 1$, alors $s = 1$, etc. Ainsi

Quelle que soit la valeur de u, on peut trouver des nombres r et s tels que

$$I + u \cdot (H - I) = E + r \cdot (G - E) + s \cdot (F - E)$$

Nous constatons que tous les points de la droite HI appartiennent au plan EFG. L'intersection est donc la droite HI elle-même.

Réponse à la question d

$$\begin{aligned} M \in JK \iff \exists v \in \mathbb{R} : M &= J + v.(K - J) \\ M &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + u. \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} -1 + 6.u \\ -2 + 6.u \\ -8 + 6.u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Essayons de trouver des réels r, s et u tels que :

$$\begin{cases} -1 + 6.u = 6.r \\ -2 + 6.u = 4.r + s \\ -8 + 6.u = 2.r + 2.s \end{cases}$$

La 1^{re} équation nous donne $r = \frac{-1}{6} + u$. En remplaçant r par cette expression dans les deux autres équations, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} r = \frac{-1}{6} + u \\ u = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.s \\ u = \frac{23}{12} + \frac{1}{2}.s \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, ce système est impossible. Il n'y a donc pas de point de percée, la droite JK est disjointe et parallèle au plan EFG.

2.3.3 Fiche n° 8 : Équations cartésiennes d'un plan

Soit α le plan passant par l'origine et les points $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
a. On note m, n et p les droites d'intersection de α avec les plans OXZ, OYZ et OXY. On demande les équations vectorielles de m, n et p.
b. Calculer la hauteur d'un point quelconque P de α en fonction de l'abscisse x et de l'ordonnée y de sa projection sur le plan OXY.
c. Suivre une démarche analogue afin de caractériser les coordonnées d'un point quelconque du plan β passant par l'origine et les points R et $S = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.3.3.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Un point quelconque de α a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d. \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

où d et e sont des réels. Ce point appartient à OXZ si et seulement si $d + 3e = 0$.

Un point quelconque P de $m = \alpha \cap OXZ$ est donc donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3e. \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Nous avons trouvé une équation vectorielle de m.

De même, un point quelconque Q de $n = \alpha \cap OYZ$ est donné par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{2}{3}e. \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Et un point quelconque R de $p = \alpha \cap OXY$ est donné par :

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{5}{4}e. \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

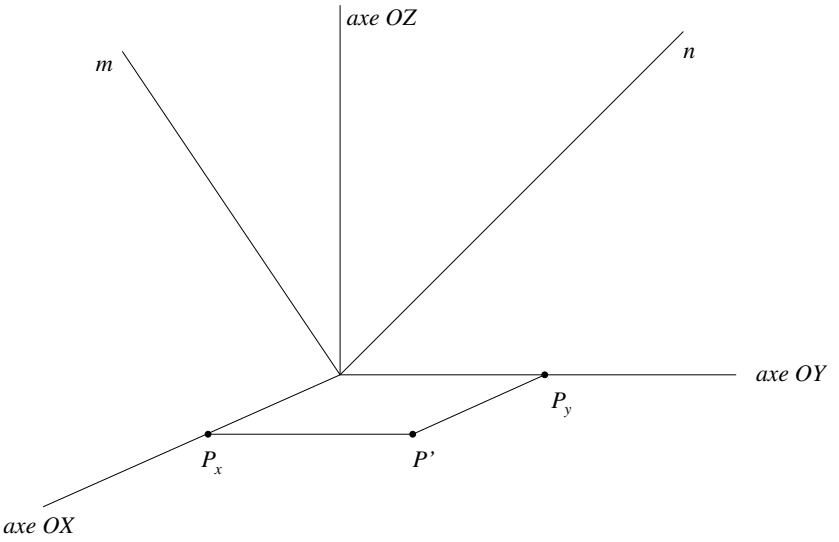
Remarquons que nous nous sommes à chaque fois ramenés à des points dont une coordonnée est nulle.

Cela signifie notamment que la droite m est dans le plan $y = 0$. *Dans ce plan*, elle a pour équation $z = 2x$.

De même, n est située dans le plan $x = 0$. *Dans ce plan*, elle a pour équation $z = y$.

Idem pour la droite p située dans le plan $z = 0$ et qui, *dans ce plan*, a pour équation $x = -2y$.

Réponse à la question b



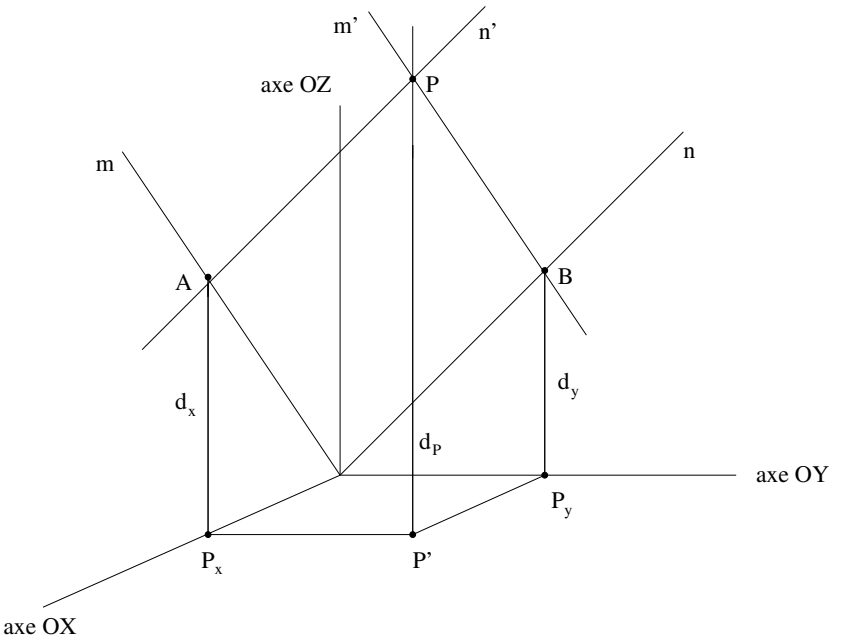
Commençons par tracer les parallèles m' et n' à m et n passant par le point P. Les droites n' et m se coupent en A, et les droites m' et n se coupent en B.

Le parallélogramme $OAPB$ se projette parallèlement à OZ sur le plan OXY selon un rectangle $OP_xP'P_y$.

Si $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $P' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ et $P_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, d'après ce que nous avons vu en a, $A = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$.

Enfin, puisque $P = A + B$, on a

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x}{2} + y \end{pmatrix}$$



Les coordonnées d'un point quelconque du plan α sont donc caractérisées par la relation :

$$z = \frac{x}{2} + y$$

Nous l'appellerons *une équation cartésienne* du plan α.

Réponse à la question c

Un point quelconque de β a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

où d et e sont des réels.

Ce point appartient à OXZ si et seulement si $3d - 6e = 0$. Un point quelconque P de $\beta \cap OXZ$ est donc donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Cette intersection est donc l'axe OZ, le plan β est vertical. Par conséquent, l'intersection $\beta \cap OYZ$ est aussi l'axe OZ.

Enfin, un point quelconque R de $p = \alpha \cap OXY$ est donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} -\frac{48}{5} \\ -\frac{36}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière droite a donc pour équation cartésienne *dans le plan* OXY :

$$y = \frac{3}{4}x$$

Mais cette équation caractérise aussi tous les points du plan β, qu'ils soient dans OXY ou non. Ainsi, $y = \frac{3}{4}x$ (ou $3x = 4y$) est aussi une équation cartésienne du plan β.

2.3.3.2 Commentaires et prolongements

Equation cartésienne d'un plan passant par l'origine

Nous venons d'obtenir deux exemples de relations liant les coordonnées d'un point quelconque situé dans un plan passant par l'origine. En général, une telle relation est du type :

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b et c sont des réels fixés.

Nous appellerons une telle relation une *équation cartésienne* du plan considéré. Comme c'est le cas pour les équations vectorielles rencontrées précédemment, une équation cartésienne doit être interprétée comme *l'abréviation d'une équivalence logique* : dire que $ax + by + cz = 0$ est une équation cartésienne d'un plan α signifie très exactement

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

Montrons que la réciproque est également vraie : une équation de ce type est l'équation d'un plan, pour autant que l'un au moins des nombres a, b, c soit différent de 0.

1. Dans un premier temps, supposons $c \neq 0$. On a alors :

$$ax + by + cz = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

Ceci montre que la relation $ax + by + cz = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par l'origine et par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$.

Remarquons que si $a = 0$, le plan d'équation $by + cz = 0$ contient l'axe OX. De même, si $b = 0$, le plan d'équation $ax + cz = 0$ contient l'axe OY.

2. Supposons à présent $c = 0$. Un au moins des coefficients a et b est différent de 0. Admettons par exemple $a \neq 0$. L'équation s'écrit $ax + by = 0$ et on a :

$$ax + by = 0 \quad \iff \quad x = -\frac{b}{a}y$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y. \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $ax+by = 0$ est l'équation cartésienne du plan passant par $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ce plan contient l'axe OZ.

Nous venons de voir que tout plan α comprenant l'origine admet une équation cartésienne du type $ax + by + cz = 0$ et que toute équation de ce type est l'équation d'un plan comprenant l'origine du moment qu'un au moins des coefficients a, b, c n'est pas nul.

Mais il est clair que si k est un réel non nul, on a l'équivalence $ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow kax + kby + kcz = 0$ de sorte que l'équation d'un plan α n'est certainement pas unique. Il importe de remarquer que deux équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ qui caractérisent le même plan α sont nécessairement proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe un réel non nul k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$.

Pour vérifier cette assertion, considérons l'intersection du plan α et du plan OXY. Il s'agit d'une droite de ce plan. Si α admet les deux équations cartésiennes précitées, la droite $OXY \cap \alpha$ aura *dans ce plan* les deux équations cartésiennes $ax + by = 0$ et $a'x + b'y = 0$. Ces équations sont donc équivalentes : tout point $\binom{x}{y}$ qui vérifie l'une vérifie aussi l'autre. Par exemple, le point $\binom{-b}{a}$ vérifie la première équation : $a.b+b.(-a) = 0$. Par conséquent, on a $a'.b - b'.a = 0$ ou $a'b = ab'$.

En considérant les intersections de α avec les plans OXZ et OYZ, on obtient de même $a'c = ac'$ et $b'c = bc'$. Si les trois nombres a, b et c sont différents de 0, on en déduit les égalités

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

La valeur commune k de ces trois rapports ne peut être nulle puisque l'un au moins des coefficients a', b' et c' n'est pas nul. Les deux équations sont donc proportionnelles.

Si deux seulement des coefficients a, b et c ne sont pas nuls, par exemples a et b, on a de même $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. On a aussi dans ce cas $c' = 0$ puisque $c = 0$, $ac' = a'c = 0$ et $a \neq 0$. Les deux équations sont donc aussi proportionnelles dans ce cas.

Enfin, si un seul des coefficients a, b, c n'est pas nul, par exemple a, alors b' et c' sont aussi nuls puisque $ab' = a'b = 0$ et $ac' = a'c = 0$. Nous obtenons encore la proportionnalité des deux équations.

Ainsi, dans tous les cas :

Les équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ déterminent le même plan si et seulement si elles sont proportionnelles : il existe un réel non nul k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$.

Equation cartésienne d'un plan quelconque

Un plan quelconque α est toujours parallèle à un plan α_0 passant par l'origine. Il existe donc toujours au moins une translation qui applique α_0 sur α. Si cette translation s'écrit $P \longmapsto P + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, le point $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ appartient à α en tant qu'image de l'origine par la translation. De plus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha \iff \exists \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \alpha_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix} \in \alpha_0$$

Si $ax' + by' + cz' = 0$ est une équation cartésienne de α_0, on a donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha \quad &\iff \quad a.(x-u) + b.(y-v) + c.(z-w) = 0 \\ &\iff \quad ax + by + cz = au + bv + cw \end{aligned}$$

Le second membre étant une constante, une équation cartésienne de α est du type :

$$ax + by + cz = d$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Nous avons vu qu'un plan comprenant l'origine peut être caractérisé par une infinité d'équations définies à un facteur près. Il en est clairement de même dans le cas des plans ne comprenant pas l'origine.

D'une part, tout point de α qui vérifie l'équation $ax + by + cz = d$ vérifie aussi $kax + kby + kcz = kd$.

D'autre part, si les équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ caractérisent toutes deux le plan α, alors le plan parallèle à α passant par l'origine est déterminé par $ax + by + cz = 0$ aussi bien que par $a'x + b'y + c'z = 0$. Ces deux équations sont donc proportionnelles : il existe $k \neq 0$ tel que $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$. Montrons qu'on a alors aussi $d = kd'$: si $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point quelconque du plan α, on a

$$d = ax + by + cz = ka'x + kb'y + kc'z = k(a'x + b'y + c'z) = kd'$$

Nous dirons encore que les équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ sont proportionnelles lorsque

$$\exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = ka' \\ b = kb' \\ c = kc' \\ d = kd' \end{cases}$$

2.3.4 Fiche n° 9 : Équations cartésiennes d'une droite

Soient les points suivants : $A = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $G = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

a. Quelle est l'intersection des plans OXY et OBC ?
b. Quelle est l'intersection des plans OXY et ABC ?
c. Quelle est l'intersection des plans ABC et EFG ?
d. Quelle est l'intersection des plans AFD et EBG ?

2.3.4.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Suivant les méthodes de la fiche N ° 8, nous obtenons sans peine :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in OXY \cap OBC \iff \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 4k \\ y = 2k \\ z = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont les équations cartésiennes des plans OXY et OBC. Les points de l'intersection de ces plans doivent donc satisfaire aux deux équations. Ensemble, elles constituent *un système d'équations cartésiennes* de la droite passant par O et $B - 3.C$.

Réponse à la question b

Le plan OXY a pour équation cartésienne : $z = 0$. Quant au plan ABC, nous savons que :

$$M \in ABC \iff \exists k, l \in \mathbb{R} : M = A + k.(B - A) + l.(C - A)$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + l. \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8k + 6l - 7 \\ 9k + 7l - 7 \\ 5k + 3l - 2 \end{pmatrix}$$

La recherche d'une équation cartésienne de ABC peut passer par l'élimination "classique" de k et l à partir de l'équation vectorielle. La méthode suivante, plus élégante, s'appuie sur les résultats de la fiche N ° 8.

Déterminons d'abord une équation cartésienne du plan α parallèle à ABC et passant par l'origine. Ce plan α a pour équation vectorielle :

$$M = k.(B - A) + l.(C - A) = k. \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + l. \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un point de l'intersection de α avec OYZ est déterminé par l'équation $8k + 6l = 0$. Choisissons par exemple $k = 3$ et $l = -4$. Le point $N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à $\alpha \cap OYZ$.

De même, on constate que le point $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ appartient à $\alpha \cap OXZ$. Ainsi, nous avons une nouvelle équation vectorielle de α :

$$M = m. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + n. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ -m \\ 3m + 8n \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons une équation cartésienne de α :

$$z = -3y + 4x$$

Une équation cartésienne de ABC est donc du type : $4x - 3y - z = k$. Or $\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \in ABC$, d'où : $4.(-7) - 3.(-7) - (-2) = k$ et $k = -5$.

Une équation cartésienne de ABC est finalement :

$$z = 4x - 3y + 5$$

Un système d'équations cartésiennes de l'intersection des plans OXY et ABC est par conséquent :

$$\begin{cases} z = 0 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

Réponse à la question c

Nous connaissons déjà l'équation cartésienne du plan ABC, trouvons-en une pour le plan EFG.

$$\begin{aligned} L \in EFG \iff \exists g, h \in \mathbb{R} : L &= E + g.(F - E) + h.(G - E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + g. \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + h. \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7g + 6h \\ -14g + 2h + 5 \\ h + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer ici la méthode précédente pour obtenir une équation cartésienne de EFG. Néanmoins, vu que la hauteur z de L ne fait intervenir que le paramètre h, une élimination traditionnelle est plus rapide :

$$\begin{cases} h = z - 2 \\ x = 7g + 6.(z - 2) \\ y = -14g + 2.(z - 2) + 5 \end{cases}$$

d'où $2x + y = 12.(z - 2) + 2.(z - 2) + 5 = 14.(z - 2) + 5$. Une équation cartésienne de EFG est donc

$$2x + y - 14z = -23$$

Un système d'équations cartésiennes de l'intersection des plans EFG et ABC est alors :

$$\begin{cases} z = 4x - 3y + 5 \\ 2x + y - 14z = -23 \end{cases}$$

Réponse à la question d

$$M \in AFD \iff \exists k, l \in \mathbb{R} : M = A + k.(F - A) + l.(D - A)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + k.\begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + l.\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14k + 13l - 7 \\ -2k + l - 7 \\ -4k + 3l - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considérons le plan β déterminé par l'origine et les points $F - A$ et $D - A$. Cherchons des points N et P situés respectivement dans les intersections de β avec OXZ et OYZ.

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ n_2 \end{pmatrix} = k_n.(F - A) + l_n.(D - A) \\ P &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = k_p.(F - A) + l_p.(D - A) \end{aligned}$$

Nous trouvons par exemple :

$$\begin{aligned} N &= (F - A) + 2.(C - A) \\ P &= -13.(F - A) + 14.(D - A) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une nouvelle équation vectorielle du plan AFD :

$$\begin{aligned} M \in AFD \iff \exists m, n \in \mathbb{R} : M &= A + (-13m + n).(F - A) + (14m - 2n).(D - A) \\ &= \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + m.\begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40n - 7 \\ 40m - 7 \\ -10m + 10n - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cherchons à présent une équation cartésienne de AFD : nous posons $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et éliminons les paramètres m et n.

$$\begin{cases} x = 40n - 7 \\ y = 40m - 7 \\ z = -10m + 10n - 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent :

$$\begin{cases} n = \frac{y+7}{40} \\ m = \frac{x+7}{40} \end{cases}$$

En remplaçant m et n par ces valeurs dans la troisième équation, l'équation cartésienne souhaitée apparait :

$$z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - 2$$

De même :

$$\begin{aligned} L \in EBG \iff \exists g, h \in \mathbb{R} : L &= E + k.(B - E) + h.(G - E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + g. \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + h. \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g + 6h \\ -3g + 2h + 5 \\ g + h + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cherchons comme précédemment des points Q et R vérifiant les conditions.

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{pmatrix} = g_q.(B - E) + h_q.(G - E) \\ R &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = g_r.(B - E) + h_r.(G - E) \end{aligned}$$

Nous trouvons par exemple :

$$\begin{aligned} Q &= 2.(B - E) + 3.(G - E) \\ P &= -6(B - E) + (G - E) \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi une nouvelle équation vectorielle du plan EBG :

$$\begin{aligned} L \in EBG \iff \exists m,n \in \mathbb{R} : L &= E + (2m-6n).(B-E) + (3m+n).(G-E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + m. \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + n. \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20m \\ 20n+5 \\ 5m-5n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remplaçons L par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = 20m \\ y = 20n + 5 \\ z = 5m - 5n + 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent :

$$\begin{cases} m = \frac{x}{20} \\ n = \frac{y-5}{20} \end{cases}$$

En remplaçant m et n par ces valeurs dans la troisième équation, l'équation souhaitée apparait :

$$z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{13}{4}$$

Le système d'équations cartésiennes que l'on obtient ainsi pour l'intersection des plans AFD et EBG est

$$\begin{cases} z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - 2 \\ z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{13}{4} \end{cases}$$

Ce système n'a aucune solution puisqu'on a deux fois la même équation au terme indépendant près.

L'intersection des plans AFD et EBG est donc vide, ce qui signifie que l'on a affaire à deux plans parallèles.

Remarquons que l'on pouvait voir immédiatement que $F - A$ et $D - A$ sont des combinaisons linéaires de $B - E$ et $G - E$. En effet, $F - A = 2.(B - E) + 2.(G - E)$ et $D - A = (B - E) + 2.(G - E)$.

2.3.4.2 Commentaires et prolongements

Des combinaisons linéaires de points

A plusieurs reprises dans ce qui précède, nous avons remplacé une équation vectorielle d'un plan par une autre équation vectorielle du même plan, se prêtant mieux aux calculs que nous avions à effectuer.

Par exemple, dans la résolution de la question b, nous connaissions une équation vectorielle du plan α :

$$M = k.(B - A) + l.(C - A) = k. \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + l. \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors déterminé un point $N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, appartenant à $\alpha \cap OYZ$ et un point $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ appartenant à $\alpha \cap OXZ$, ce qui nous fournissait une nouvelle équation vectorielle de α :

$$M = m. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + n. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ -m \\ 3m + 8n \end{pmatrix}$$

Les points N et P étaient des combinaisons linéaires de $B - A$ et $C - A$:

$$N = 3 \cdot (B - A) - 4 \cdot (C - A) \text{ et } P = 7 \cdot (B - A) - 9 \cdot (C - A)$$

On remarque immédiatement que tout point combinaison linéaire de N et P est en effet une combinaison linéaire de $B - A$ et $C - A$ et appartient donc à α : si $X = a \cdot N + b \cdot P$, alors $X = (3a + 7b) \cdot (B - A) - (4a + 9b) \cdot (C - A)$. Ainsi toute combinaison linéaire de N et P est bien un point de α.

Mais il y a plus : toute combinaison linéaire de $B - A$ et $C - A$, c'est-à-dire tout point de α est une combinaison linéaire de N et P. Nous pouvons en effet *inverser* les relations

$$\begin{cases} N = 3 \cdot (B - A) - 4 \cdot (C - A) \\ P = 7 \cdot (B - A) - 9 \cdot (C - A) \end{cases}$$

Par exemple, en multipliant la première équation par 7, la seconde par 3 et en les soustrayant, on obtient $-(C - A) = 7N - 3P$. De façon analogue, $-(B - A) = 9N - 4P$.

$$\begin{cases} B - A = -9N + 4P \\ C - A = -7N + 3P \end{cases}$$

C'est cette possibilité d'inverser les formules donnant N et P en fonction de $B-A$ et $C-A$ qui justifie que l'on peut utiliser à volonté une quelconque des deux équations vectorielles $M = k.(B-A) + l.(C-A)$ ou $M = m.N + n.P$ pour étudier le plan α, car *ces deux équations caractérisent le même plan.*

D'une façon générale, supposons qu'un plan β (passant par l'origine) soit donné par une équation vectorielle $X = aU + bV$ et que P et Q soient des combinaisons linéaires de U et V (donc appartiennent au plan β) :

$$\begin{cases} P = k.U + l.V \\ Q = m.U + n.V \end{cases}$$

Nous pouvons alors nous demander si ces formules sont inversibles, de sorte que le même plan β aurait aussi pour équation vectorielle $X = a'P + b'Q$. D'un point de vue géométrique, il est clair que la condition est que les deux points P et Q ne soient pas alignés avec l'origine, sans quoi les combinaisons linéaires de P et Q ne *rempliraient pas* β. Les couples $\binom{k}{l}$ et $\binom{m}{n}$ ne peuvent donc pas être proportionnels, ce qui s'exprime par la condition

$$kn - ml \neq 0$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier qu'effectivement si cette quantité n'est pas nulle, les points U et V s'expriment comme combinaisons linéaires de P et Q :

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{kn-lm}(n.P - l.Q) \\ V = \dfrac{1}{kn-lm}(-mP + kQ) \end{cases}$$

Des combinaisons linéaires d'équations

Nous avons vu dans cette fiche qu'une droite est caractérisée par un système de *deux* équations cartésiennes. Il est important de noter que ces équations ne peuvent être quelconques. Chacune d'entre elles caractérise un plan. Associer un système de deux équations cartésiennes à une droite, c'est lui associer un système de deux plans dont la droite est l'intersection. Les deux plans ne peuvent être confondus. Leurs équations ne peuvent donc être proportionnelles.

Ainsi, *le système de deux équations*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

caractérise une droite si et seulement si l'un au moins des trois nombres $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ *n'est pas nul.*

Par ailleurs, toute droite d de l'espace peut s'exprimer de nombreuses façons comme l'intersection de deux plans et possède donc, non *un* mais *des* systèmes d'équations cartésiennes du type :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

On peut alors se demander comment construire, à partir de l'un d'entre eux, *tous* les systèmes de deux équations cartésiennes du type précédent qui représentent la droite d.

En abordant cette question, on remarque immédiatement que si un point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie les deux équations ci-dessus, il vérifie également toute équation $ux + vy + wz = q$ obtenue par combinaison linéaire des deux précédentes, c'est-à-dire toute équation pour laquelle on peut trouver deux réels k et l tels que

$$\begin{cases} u = ka_1 + la_2 \\ v = kb_1 + lb_2 \\ w = kc_1 + lc_2 \\ q = kd_1 + ld_2 \end{cases}$$

En effet si de tels nombres k et l existent, on a évidemment, quel que soit le point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de d,

$$ux + vy + wz = k(a_1x + b_1y + c_1z) + l(a_2x + b_2y + c_2z) = kd_1 + ld_2 = q$$

Donc

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ux + vy + wz = q$$

L'interprétation géométrique de cette implication est claire : le plan d'équation $ux + vy + wz = q$ contient la droite intersection des plans α et β d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$.

Il se fait — et c'est la clé de la réponse à notre problème — que, réciproquement, tout plan passant par la droite intersection des deux plans α et β possède une équation cartésienne qui est combinaison linéaire de celles de ces deux plans.

La vérification de cette propriété utilise le fait que les deux équations cartésiennes données ne sont pas proportionnelles puisqu'elles sont celles de deux plans sécants. L'un au moins des nombres $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ est donc différent de zéro. Admettons qu'on ait $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Dans ce cas, la droite d n'est pas horizontale. En effet, la condition $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entraîne que le système de deux équations linéaires en deux inconnues

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z \end{cases}$$

admet une solution unique quels que soient les seconds membres. Autrement dit, il est possible d'exprimer l'abscisse et l'ordonnée des points de la droite d en fonction de leur hauteur. Si la droite était horizontale, tous ses points auraient la même hauteur, donc aussi la même abscisse et la même ordonnée, ce qui est manifestement impossible.

La condition $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entraîne aussi que le couple $\binom{u}{v}$ est une combinaison linéaire des couples $\binom{a_1}{b_1}$ et $\binom{a_2}{b_2}$, c'est-à-dire qu'il existe des réels k et l tels que

$$\begin{cases} u = ka_1 + la_2 \\ v = kb_1 + lb_2 \end{cases}$$

On a en effet $ub_2 - va_2 = k(a_1b_2 - b_1a_2)$, ce qui permet de déterminer k. Le second coefficient l est déterminé de façon semblable.

A présent, si le point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie les deux équations $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x+b_2y+c_2z = d_2$, donc aussi l'équation $ux+vy+wz = q$, il vérifie également l'équation

$$k(a_1x + b_1y + c_1z) + l(a_2x + b_2y + c_2z) - (ux + vy + wz) = kd_1 + ld_2 - q$$

laquelle n'est autre que

$$(kc_1 + lc_2 - w)z = kd_1 + ld_2 - q$$

Comme la droite d n'est pas horizontale, l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée par tous les points de d que si $kc_1+lc_2-w = 0$ et $kd_1+ld_2-q = 0$. Ainsi, l'équation $ux+vy+wz = q$ est une combinaison linéaire de $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Nous venons d'établir que

Un plan γ passe par l'intersection de deux plans α et β si et seulement si toute équation cartésienne de γ est une combinaison linéaire des équations de α et β.

Nous pouvons à présent déterminer dans quel cas deux systèmes de deux équations linéaires caractérisent la même droite :

Les deux systèmes de deux équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = q_1 \\ u_2x + v_2y + w_2z = q_2 \end{cases}$$

déterminent la même droite si et seulement si chacune des équations d'un système est une combinaison linéaire des deux équations de l'autre système.

Autrement dit, il doit exister des réels k, l, m, n et k', l', m' et n' tels que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + l' \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = m' \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + n' \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Visiblement nous nous retrouvons dans une situation analogue à celle rencontrée plus haut, qui était relative aux combinaisons linéaires de points. La seule différence est que nous manipulons à présent des colonnes de quatre nombres au lieu de colonnes de trois nombres !

Ces calculs débouchent inévitablement sur l'introduction des matrices $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} k' & l' \\ m' & n' \end{pmatrix}$ *et sur le fait que ces matrices sont inverses l'une de l'autre ...*

2.3.5 Fiche n° 10 : Projecteurs et équations cartésiennes

On considère quatre points non coplanaires $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le projecteur sur la droite OC parallèlement au plan OAB.

a. Quelles sont les coordonnées de la projection P' du point $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

b. Si nous munissons la droite OC d'un repère en choisissant O comme origine et C comme point d'abscisse 1, quelle est l'abscisse du point P' ?

c. Répondre aux mêmes questions pour le point $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2.3.5.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Le point cherché P' est le point de percée de la droite OC dans le plan parallèle à OAB passant par P.

Puisque P' appartient à ce plan, il existe des réels a et b tels que $P' = P + a.A + b.B$.

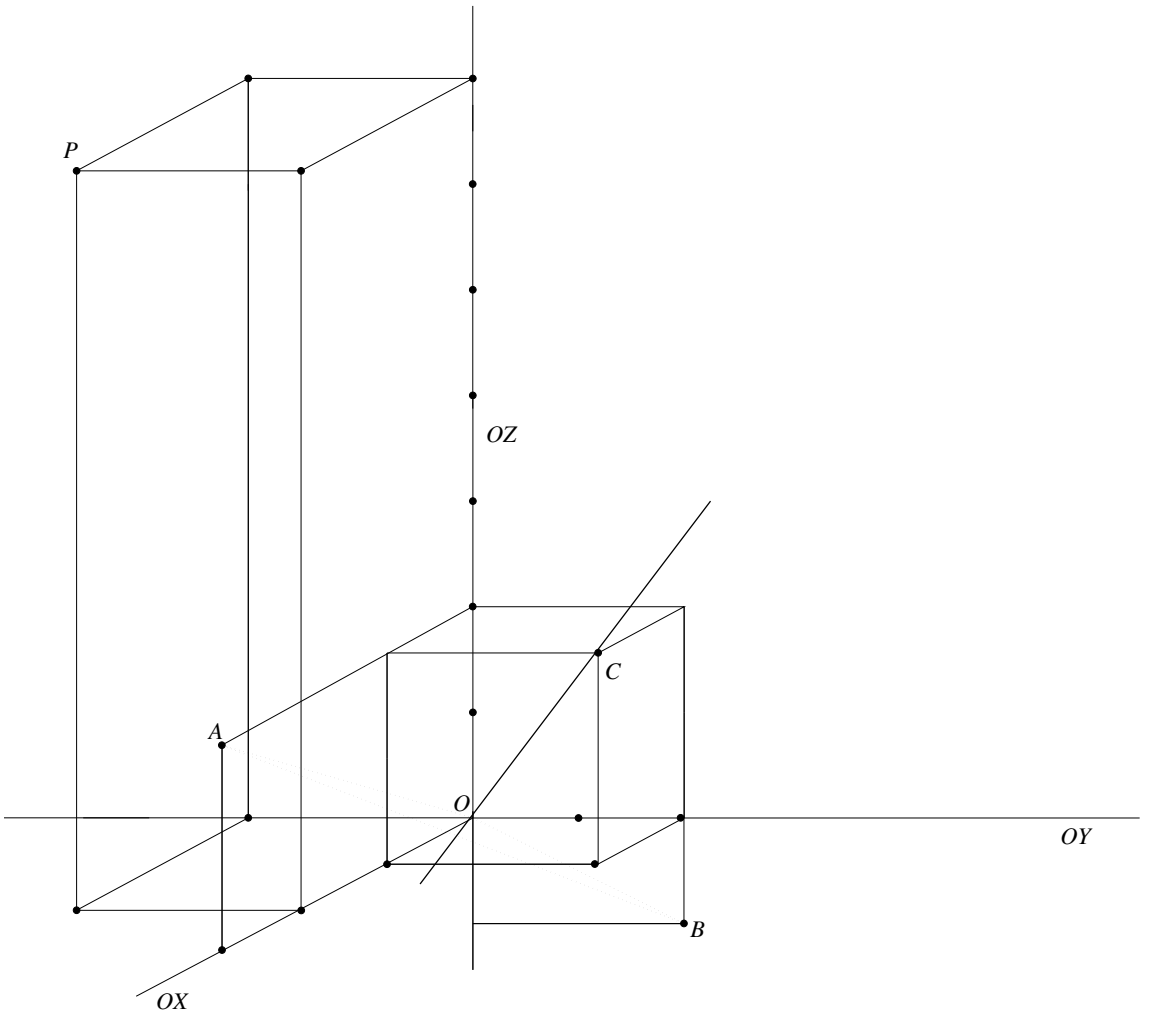
Puisque P' appartient à OC, il existe un réel k tel que $P' = k.C$.

Les réels a, b, k doivent donc vérifier la condition

$$P + a.A + b.B = k.C$$

On peut écrire la condition ci-avant :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + a.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ou encore

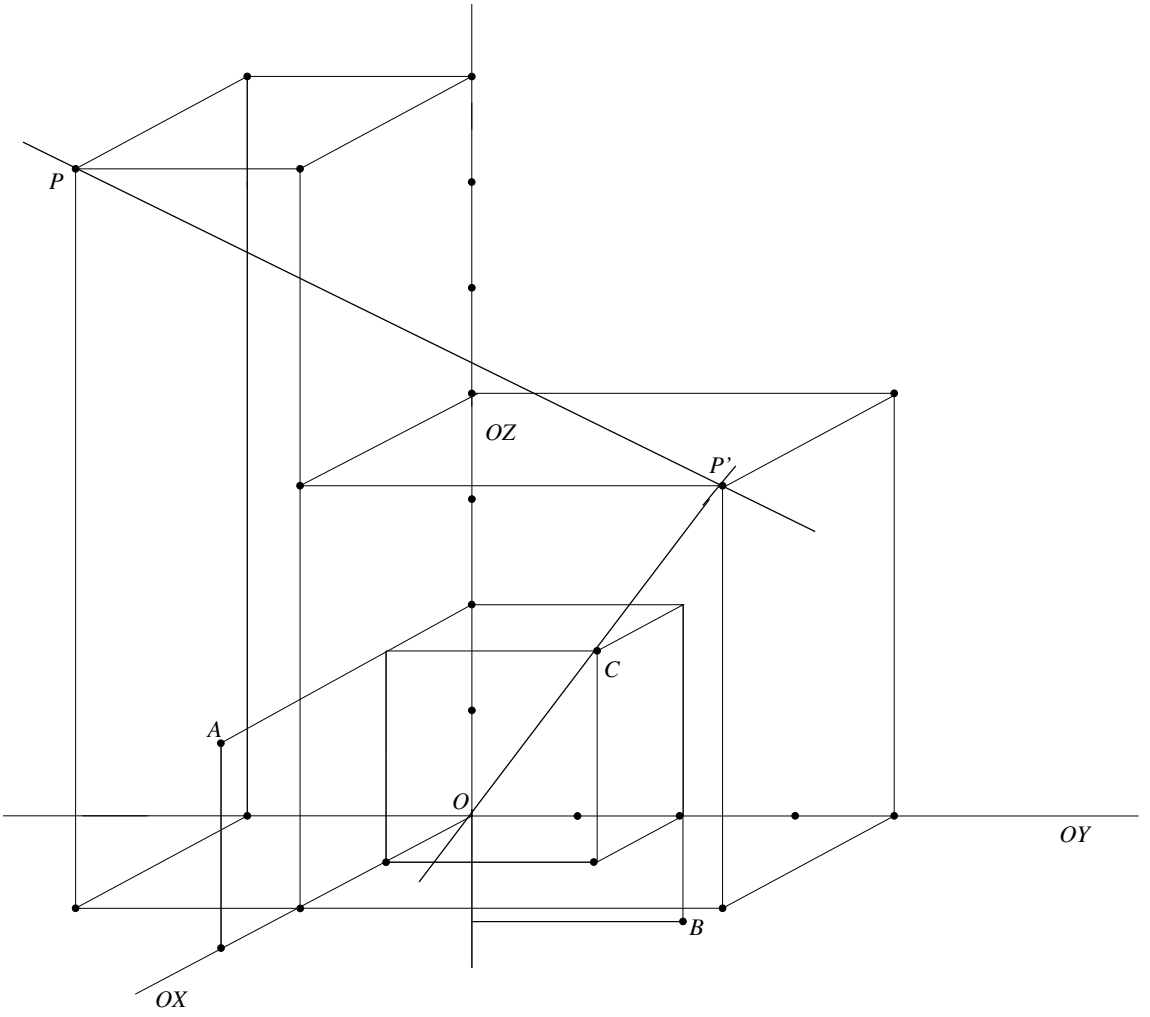
$$\begin{cases} 2 + a.3 + b.0 = k.1 \\ -2 + a.0 + b.2 = k.2 \\ 7 + a.2 + b.(-1) = k.2 \end{cases}$$

De la première équation, on déduit $a = \frac{k-2}{3}$, et de la deuxième, $b = k + 1$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la troisième équation, on obtient $\frac{2k-4}{3} - k - 1 + 7 = 2k$, d'où

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ k = 2 \end{cases}$$

Ainsi

$$P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3. \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Réponse à la question b

Puisque $P' = 2.C$, l'abscisse de P' par rapport au repère de OC (obtenu en choisissant O comme origine et C comme point d'abscisse 1) vaut 2.

Réponse à la question c

Le point cherché Q' est le point de percée de la droite OC dans le plan parallèle à OAB passant par Q.

Un raisonnement identique à celui effectué en a nous mène à la condition

$$Q + a.A + b.B = k.C$$

qui peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a. \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} x + a.3 + b.0 = k.1 \\ y + a.0 + b.2 = k.2 \\ z + a.2 + b.(-1) = k.2 \end{cases}$$

On en déduit $a = \frac{k-x}{3}$, $b = \frac{2k-y}{2}$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la troisième équation, on obtient $\frac{2k-2x}{3} - \frac{2k-y}{2} + z = 2k$, d'où

$$\boxed{k = \frac{-4x + 3y + 6z}{14}}$$

et

$$a = \frac{-6x + y + 2z}{14} \qquad b = \frac{-2x - 2y + 3z}{7}$$

Le point Q' cherché est

$$Q' = k.C = \frac{-4x + 3y + 6z}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4x+3y+6z}{14} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \end{pmatrix}$$

Son abscisse par rapport au repère de OC obtenu en choisissant O comme origine et C comme point d'abscisse 1 vaut $\dfrac{-4x + 3y + 6z}{14}$.

2.3.5.2 Commentaires et prolongements

A nouveau l'équation cartésienne d'un plan

Nous venons de trouver l'abscisse sur OC de la projection du point $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\frac{-4x + 3y + 6z}{14}$$

Par exemple, pour $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, cette abscisse vaut $\frac{-4.2+3.(-2)+6.7}{14} = 2$, ainsi que nous l'avions trouvé précédemment.

Nous pouvons à présent caractériser algébriquement le plan α, parallèle à OAB et passant par P car ce plan est constitué de *tous* les points de l'espace qui ont même projection sur OC que le point $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \frac{-4x+3y+6z}{14} = 2 \Leftrightarrow 4x-3y-6z = -28$$

La considération du projecteur parallèlement au plan α nous a ainsi amenés à retrouver une équation cartésienne de ce plan.

En même temps, il apparaît clairement que l'équation de tout plan parallèle à α ne diffère de celle de α que par le terme indépendant. En effet, un plan parallèle à α se projette en un point de OC d'abscisse différente de 2, par exemple u et est alors caractérisé par l'équation $\frac{-4x+3y+6z}{14} = u$.

Des questions apparaîssent cependant légitimes : l'équation cartésienne du plan α obtenue par ce procédé dépend-elle du point choisi comme point unité sur la droite OC ? Et que se passe-t-il lorsqu'on utilise le projecteur parallèle à α sur une autre droite que OC ?

Les réponses à ces questions sont *a priori* connues à la suite des résultats obtenus dans les fiches précédentes. Nous y avons montré en effet que *toutes* les équations cartésiennes de α sont multiples l'une de l'autre. Le changement du repère choisi sur la droite OC ou de la droite OC elle-même ne saurait donc entraîner d'autre modification à l'équation cartésienne obtenue que la multiplication de tous les coefficients par la même constante. La réponse traitera cependant cette question directement, sans supposer connue l'unicité (à un facteur près) de l'équation cartésienne d'une droite.

Les équations d'un projecteur

Les activités proposées dans la présente fiche ont également fait apparaître un nouveau type de représentation d'une transformation géométrique. Considérons toujours le point $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et son image par le projecteur $\text{proj}_{OC}^{//OAB}$, sur OC parallèlement à OAB. Nous avons calculé cette image et obtenu

$$\begin{pmatrix} \frac{-4x+3y+6z}{14} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \end{pmatrix}$$

Si nous notons $Q' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-4x + 3y + 6z}{14} \\ y' = \dfrac{-4x + 3y + 6z}{7} \\ z' = \dfrac{-4x + 3y + 6z}{7} \end{cases}$$

Ce système d'équations peut raisonnablement être appelé *un système d'équations du projecteur* mais il convient de préciser « relativement au repère de l'espace », puisque x, y, z ainsi que x', y', z' sont des coordonnées relatives au repère choisi dans l'espace.

Nous pourrions aussi tenir compte de ce que le projecteur $\text{proj}_{OC}^{//OAB}$ applique l'intégralité de l'espace sur la droite OC et qu'une seule coordonnée suffit pour repérer un point sur une droite. C'est ainsi que nous avons déterminé l'abscisse de Q' lorsqu'on choisit sur OC le point O comme origine et le point C comme point d'abscisse 1. Cette abscisse est alors donnée par la formule

$$k = \frac{-4x + 3y + 6z}{14}$$

que nous pouvons appeler *l'équation du projecteur* $\text{proj}_{OC}^{//OAB}$ *relativement au repère usuel de l'espace et au repère* (O, C) *de la droite* OC.

2.3.6 Fiche n° 11 : Formes linéaires (1)

Reprenons la situation de la fiche n°10 : $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a. Sur OC, choisissons le repère $(O, p.C)$ où $p \in \mathbb{R}$. Calculer les abscisses de $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(P)$ et $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(Q)$.

b. Soit $D = C + l.A + m.B$ où $l, m \in \mathbb{R}$. Sur OD, choisissons le repère (O, D). Calculer les abscisses de $\text{proj}_{OD}^{//OAB}(P)$ et $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(Q)$.

c. Soit $E = p.C + l.A + m.B$ où $k, l, m \in \mathbb{R}$. Sur OE, choisissons le repère (O, E). Calculer les abscisses de $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(P)$ et $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(Q)$.

2.3.6.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Le cheminement est le même que celui de la fiche précédente. On connait deux expressions des coordonnées de l'image de P et Q. Si s est l'abscisse de P' par rapport au repère (O, pC), on a $P' = s.pC$, d'où :

$$P' = s.\begin{pmatrix} p \\ 2p \\ 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De même

$$Q' = s.\begin{pmatrix} p \\ 2p \\ 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4x+3y+6z}{14} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \end{pmatrix}$$

Ainsi l'abscisse de P' par rapport au repère (O, pC) est $\frac{2}{p}$ et celle de Q' est $\frac{-4x+3y+6z}{14.p}$. Dans ces conditions, le plan α parallèle à OAB et passant par le point $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est caractérisé comme suit :

$$M \in \alpha \iff \frac{-4x+3y+6z}{14.p} = \frac{2}{p} \iff \frac{-4x+3y+6z}{14} = 2$$

Remarquons que l'on retrouve là l'équation de la fiche N° 10 : *cette équation est indépendante du point choisi d'abscisse 1 sur OC.*

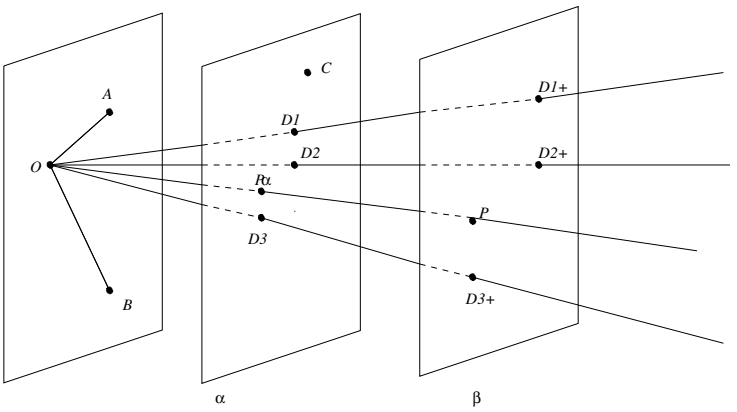
Réponse à la question b

Par calcul, si nous suivons toujours la méthode de la fiche précédente, nous trouvons le système suivant dans lequel r est l'abscisse de la projection de P sur OD par rapport au repère (O, D).

$$\begin{cases} 2 + a.3 + b.0 = r.(1 + 3.l) \\ -2 + a.0 + b.2 = r.(2 + 2.m) \\ 7 + a.2 + b.(-1) = r.(2 + 2.l - m) \end{cases}$$

Nous en déduisons $a = \frac{r+3.r.l-2}{3}$, $b = \frac{2.r+2.m.r+2}{2}$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la troisième équation, il vient $r = 2$

Nous retrouvons donc, comme prévu, la même abscisse que sur la droite OC. Il n'est pas inutile de donner une interprétation géométrique de ce fait. Il est d'abord clair que le point D appartient au plan α parallèle à OAB passant par C puisque $D - C = l.A + m.B$.



Quelle que soit la position du point D dans le plan α, l'abscisse de la projection du point P sur OD par rapport au repère (O, D) sera toujours la même.

En effet, soit β le plan parallèle à OAB passant par P. Considérons trois points D_1, D_2 et D_3 de α, ainsi que les points de percée D_{1+}, D_{2+} et D_{3+} des trois droites OD_1, OD_2 et OD_3 dans le plan β. Chacun des points D_n^+ est la projection de P sur OD_n parallèlement à OAB.

Soit P_α le point de percée de la droite OP dans α. Via le théorème de Thalès, nous voyons que :

$$\frac{|OP|}{|OP_\alpha|} = \frac{|OD_{1+}|}{|OD_1|} = \frac{|OD_{2+}|}{|OD_2|} = \frac{|OD_{3+}|}{|OD_3|}$$

Par conséquent, tous les points D_n^+ ont même abscisse pour autant que l'on prenne à chaque fois le point D_n comme point d'abscisse 1 sur la droite OD_n, et cette abscisse commune est aussi l'abscisse du point P lui-même sur la droite OP lorsqu'on choisit sur cette droite le repère (O, P_α).

Quant au point Q, l'abscisse de sa projection sur OD s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} x + a.3 + b.0 = r.(1 + 3.l) \\ y + a.0 + b.2 = r.(2 + 2.m) \\ z + a.2 + b.(-1) = r.(2 + 2.l - m) \end{cases}$$

On obtient à nouveau $r = \frac{-4x+3y+6z}{14}$. L'équation cartésienne du plan α parallèle à OAB et passant par le point $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ qui se déduit de ces calculs est encore

$$\frac{-4x + 3y + 6z}{14} = 2$$

Réponse à la question c

Le point E est le point d'abscisse k de la droite relativement au repère (O, C). Ce cas généralise ainsi ceux rencontrés en a (où $l = m = 0$) et b (où $k = 1$). Des calculs analogues aux précédents montrent que l'abscisse de $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(P)$ n'est autre que $\frac{2}{p}$ et que celle de $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(Q)$ est $\frac{-4x+3y+6z}{14.p}$.

L'équation cartésienne du plan α est donc, encore et toujours

$$\frac{-4x + 3y + 6z}{14} = 2$$

2.3.6.2 Commentaires et prolongements

Nous venons d'obtenir par un procédé direct la confirmation de ce que l'équation cartésienne d'un plan, considéré comme plan projetant, ne dépend ni de la droite sur laquelle on projette, ni du repère choisi sur cette droite.

Le travail réalisé nous a également fourni une interprétation nouvelle de l'équation cartésienne d'un plan ou plus exactement de ce qui est commun aux équations cartésiennes de plans parallèles, c'est-à-dire les termes du premier degré de ces équations. Expliquons-nous :

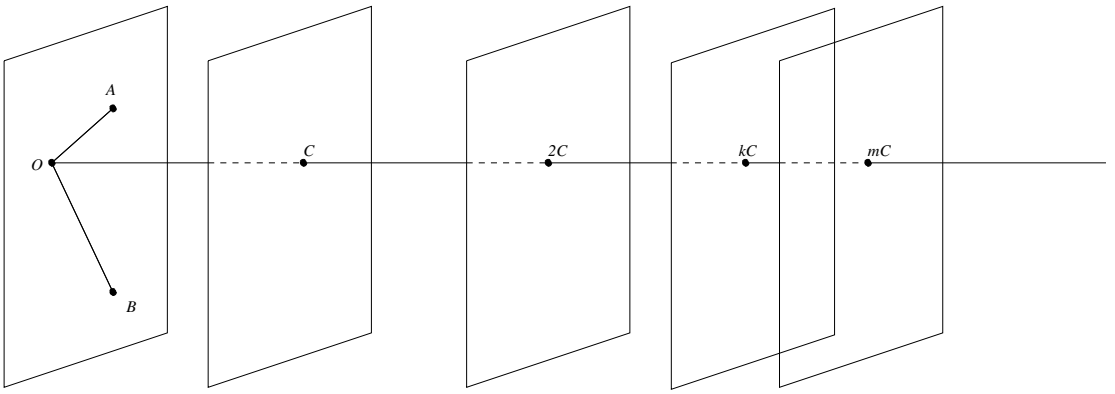
Considérons un plan passant par l'origine, α_0 (α_0 était noté OAB dans les activités ci-dessus) et une droite OC sécante avec α. Si P est un point de OC, notons α_P le plan parallèle à α passant par P.

Clairement, tous les plans α_P ont une équation cartésienne du type

$$ax + by + cz = f(P)$$

où les coefficients a, b et c ne dépendent pas du point P choisi sur OC. (Nous savons que l'équation d'un plan n'est définie qu'à un facteur près, mais nous décidons de choisir ici la même expression $ax + by + cz$ quel que soit $P \in OC$, de sorte que seul le terme indépendant $f(P)$ varie selon la position de P sur la droite OC.)

De plus, il résulte des problèmes traités dans cette fiche, d'une part que la valeur de $f(P)$ ne dépend ni du choix de la droite OC, pourvu qu'elle soit sécante à α_0, ni du repère choisi sur OC et d'autre part que cette valeur de $f(P)$ est *proportionnelle à l'abscisse de P sur OC.*



En conséquence, si nous choisissons comme point unité sur OC le point de percée de OC dans le plan de la famille (α_P) dont l'équation est $ax + by + cz = 1$, la valeur de $f(P)$ est exactement l'abscisse de P au long de OC.

Nous obtenons ainsi une interprétation géométrique intéressante de la fonction

$$(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$$

qui figure aux premiers membres des équations des plans de la famille (α_P) et dont nous dirons que c'est une *forme linéaire* associée aux plans de cette famille : pour autant que le repère de OC soit choisi de la manière indiquée, si nous considérons deux points $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, la valeur absolue

$$|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_2 + by_2 + cz_2)|$$

n'est autre que la longueur de la projection du segment $[P_1, P_2]$ sur la droite OC.

Cette expression représente en quelque sorte la distance entre les deux plans α_{P_1} et α_{P_2} *mesurée au long de la droite OC.*

Une telle interprétation de la fonction $ax+by+cz$ est particulièrement intéressante lorsque la droite OC est perpendiculaire aux plans α_P. Elle débouche sur l'équation normale d'un plan, comme on le verra dans les fiches consacrées au produit scalaire.

2.3.7 Fiche n° 12 : Formes linéaires (2)

Soit un repère $OXYZ$ fixé. On considère la fonction :

$$L \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 2x + 3y + 5z$$

Existe-t-il un plan OAB et une droite OC tels que l'abscisse de la projection $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(P)$ d'un point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit $L(P)$?

2.3.7.1 Solution commentée

D'après la fiche N ° 11, si un tel plan OAB et une telle droite OC existent, nous pouvons écrire que la projection sur OC parallèlement à OAB d'un point quelconque $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace est donnée par :

$$\text{proj}_{OC}^{//OAB}(P) = (2x + 3y + 5z).C$$

Car $2x + 3y + 5z$ est dans ce cas l'abscisse du point P sur la droite OC par rapport au repère (O, C).

Puisque $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(C) = C$, le point C cherché doit satisfaire à l'équation $2x+3y+5z = 1$. Prenons par exemple :

$$C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même, les points A et B se projettent sur l'origine et doivent tous deux satisfaire à l'équation : $2x + 3y + 5z = 0$. Nous pouvons prendre par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne $2x + 3y + 5z = 1$ est donc celle du plan parallèle à OAB passant par le point C.

Et nous avons ainsi répondu à la question.

2.3.7.2 Commentaires et prolongements

Dans cette fiche, nous adoptons la démarche réciproque de celles des deux fiches précédentes. Dans celles-ci, nous avions d'abord montré que tout projecteur sur une droite parallèlement à un plan détermine une forme linéaire, c'est-à-dire une fonction du type $(x, y, z) \mapsto ax+by+cz$, dès qu'un repère a été choisi dans l'espace et un autre sur la droite image du projecteur. Nous avions aussi remarqué qu'en modifiant la droite sur laquelle on projette ou le repère choisi sur cette droite, la forme linéaire associée était simplement multipliée par une constante. Nous pouvons donc dire que

La donnée d'un repère dans l'espace permet d'associer à tout plan un ensemble de formes linéaires que nous pouvons appeler « proportionnelles ».

Il s'agissait dans la présente fiche d'établir que réciproquement, toute forme linéaire $L : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ est en effet associée de la façon qui vient d'être indiquée à un projecteur sur une droite OC parallèlement à un plan que nous noterons α. Nous désignerons ce projecteur par la notation simplifiée Pr.

Le repère sur la droite OC étant bien choisi, pour $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la valeur de $L(P) = L(x, y, z)$ est exactement l'abscisse de la projection de P sur OC. Si le point C est le point d'abscisse 1 de la droite OC, on a donc

$$Pr(P) = L(P).C$$

Comme dans les commentaires de la fiche 11, notons α_0 le plan parallèle à α comprenant l'origine, c'est-à-dire le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ Nous noterons aussi α_P le plan parallèle à α comprenant un point P.

Ainsi, le plan α_0 est l'ensemble des points dont l'image par la projection $Pr = \text{proj}_{OC}^{//OAB}$ est l'origine O. Et α_P est l'ensemble des points qui ont même projection que P sur OC.

Plusieurs constatations sont immédiates.

– Par exemple du théorème de Thalès résulte facilement que, pour tout réel h, l'abscisse du point $Pr(hP)$ est h fois l'abscisse de $Pr(P)$, ce que nous pouvons écrire

$$Pr(h.P) = hPr(P)$$

Le calcul suivant est encore plus immédiat :

$$L(h.P) = a(hx) + b(hy) + c(hz) = h(ax + by + cz) = hL(P)$$

Les deux résultats sont *évidemment* équivalents puisque Pr et L sont liés par la formule $Pr(P) = L(P).C$.

– Si R et Q appartiennent au même plan α_P, la droite RQ est parallèle à α_0 et le point $R - Q$ appartient à α_O. On a donc *tout aussi évidemment* que plus haut :

$$Pr(R) = Pr(Q) \text{ et } Pr(R - Q) = O$$

d'où résulte

$$L(R) = L(Q) \text{ et } L(R - Q) = 0$$

Cette remarque nous permet d'écrire

$$Pr(R - Q) = Pr(R) - Pr(Q) \text{ et } L(R - Q) = L(R) - L(Q)$$

Mais alors,

$$Pr(R + Q) = Pr(R - (-Q)) = Pr(R) - Pr(-Q)$$

et comme

$$Pr(-Q) = Pr((-1).Q) = (-1).Pr(Q) = -Pr(Q)$$

il vient

$$Pr(R + Q) = Pr(R) + Pr(Q)$$

Cette propriété géométrique du projecteur Pr entraîne automatiquement la propriété correspondante de la forme linéaire L :

$$L(R + Q) = L(R) + L(Q)$$

Cette dernière formule aurait aussi pu être obtenue par un simple calcul sur les coordonnées :

$$\begin{aligned} L(R+Q) &= L\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= a.(x_1 + x_2) + b.(y_1 + y_2) + b.(z_1 + z_2) \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 + ax_2 + by_2 + cz_2 \\ &= L(R) + L(Q) \end{aligned}$$

– Les formules qui viennent d'être établies peuvent être condensées à l'aide du formalisme des *combinaisons linéaires*

Quels que soient les points Q et R, et quels que soient les réels h et k :

$$Pr(h.Q + k.R) = hPr(Q) + kPr(R)$$

$$L(h.Q + k.R) = hL(Q) + kL(R)$$

Introduisons à présent un repère (O, A, B) dans le plan α_0 et soit P un point quelconque de l'espace. Soit $P' = Pr(P)$.

Si h est l'abscisse de P' sur OC, on a alors $P' = h.C$. De plus le point $P - P'$ appartient à α_0. Il existe donc des réels a et b tels que

$$P - h.C = a.A + b.B$$

ou encore

$$P = a.A + b.B + h.C$$

On a ainsi montré que A, B et C *engendrent* $\mathbb{R}^3$, ce qui signifie que tout point de l'espace est une combinaison linéaire de A, B et C.

De plus, ils sont *linéairement indépendants*, ce qui signifie qu'aucun d'entre eux n'est une combinaison linéaire des deux autres :

1. C n'est pas une combinaison linéaire de A et B car C n'appartient pas au plan OAB.
2. B n'appartient pas au plan OAC, sinon C appartiendrait à OAB.
3. De même A n'appartient pas à OBC.

Cette propriété d'indépendance linéaire de A, B et C a pour conséquence que deux de ces trois points ne sont pas suffisants pour engendrer l'espace par combinaisons linéaires : par exemple en combinant linéairement A et B, on n'obtient que des points du plan OAB et jamais C ni aucun multiple de C, ni aucun point qui s'écrit $a.A + b.B + h.C$ avec $h \neq 0$.

2.3.8 Synthèse

A l'issue de l'étude des situations décrites dans les fiches 7 à 12, nous retiendrons les résultats suivants :

A propos de l'intersection d'une droite et d'un plan

On considère une droite AB (avec $A \neq B$) et un plan MNP (avec M, N et P non alignés). trois cas peuvent se présenter :

- La droite AB est *dans* le plan MNP
  $\iff \forall u \in \mathbb{R} \exists v, w \in \mathbb{R}$ tels que $A + u.(B - A) = M + v.(N - M) + w.(P - M)$
- La droite AB *coupe* le plan MNP
  $\iff \exists u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $A + u.(B - A) = M + v.(N - M) + w.(P - M)$
- La droite AB *n'a aucun* point commun avec le plan MNP
  $\iff \forall u, v, w \in \mathbb{R} : A + u.(B - A) \neq M + v.(N - M) + w.(P - M)$

A propos de l'équation cartésienne d'un plan

- l'équation cartésienne d'un plan π s'écrit $ax + by + cz = d$ et signifie :
  π est un plan si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ (non tous nuls) et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X \in \pi \iff ax + by + cz = d$$

- Deux équations cartésiennes déterminent un même plan si et seulement si elles sont proportionnelles.
  Cela signifie que les équations cartésiennes $a_1x+b_1y+c_1z = d_1$ et $a_2x+b_2y+c_2z = d_2$ représentent le même plan si et seulement si la colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$ est multiple de la colonne $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

A propos des positions relatives des plans en termes d'équations cartésiennes

Plusieurs cas s'offrent à nous :

- Deux équations cartésiennes $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ et $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ déterminent deux plans sécants si et seulement si un *au moins* des nombres $a_1b_2-a_2b_1, a_1c_2-a_2c_1, b_1c_2-b_2c_1$ est différent de 0.
- Deux équations cartésiennes $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ et $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ déterminent deux plans parallèles si et seulement si les trois nombres $a_1b_2-a_2b_1, a_1c_2-a_2c_1, b_1c_2-b_2c_1$ sont nuls (les deux plans peuvent être éventuellement confondus).

A propos des relations entre les équations cartésiennes et vectorielles d'un plan

On obtient une équation cartésienne d'un plan à partir d'une équation vectorielle exprimée en coordonnées en y éliminant les deux paramètres.

Si $ax+by+cz=d$ est une équation cartésienne d'un plan π, alors en posant :

$$U=\begin{pmatrix}1\\0\\d-a\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}0\\1\\d-b\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix}$$

une équation vectorielle du plan s'écrit :

$$X=D+x.(U-D)+y.(V-D)$$

De cette manière, les paramètres x et y deviennent les coordonnées d'un point quelconque du plan dans le repère (D,U,V).

A propos des équations cartésiennes des plans passant par une droite donnée

Un plan γ contient l'intersection des plans α et $\beta \iff$ toute équation cartésienne de γ est une combinaison linéaire de celles de α et β.

A propos de projecteurs et de formes linéaires

La donnée d'un repère dans l'espace permet d'associer à tout plan un ensemble de formes linéaires proportionnelles.

Pour plus de détails, cfr les commentaires de la fiche N ° 12.

2.4. Le produit scalaire

2.4.1 Introduction

Dans les deux fiches qui suivent, nous allons construire et utiliser le produit scalaire. La formule fondamentale reliant le produit scalaire à l'une de ses expressions en termes de coordonnées sera directement extraite du théorème de Pythagore sous sa forme généralisée.

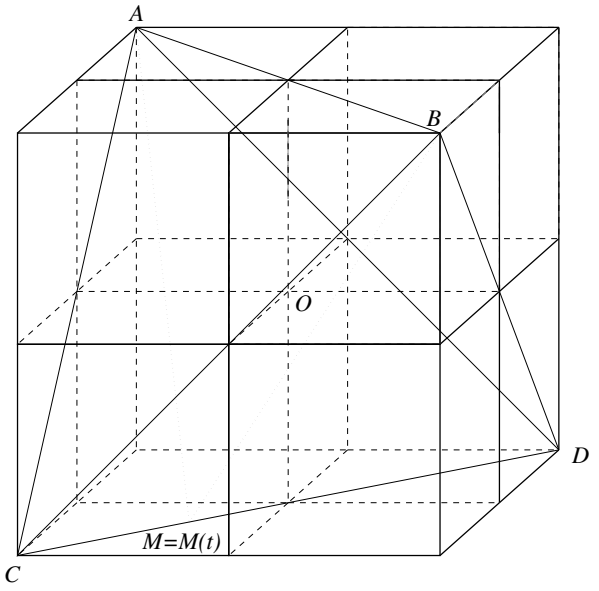
Les applications étudieront entre autres certaines fonctions associées à des mesures d'angles, le critère d'orthogonalité entre droites et plans, la notion de plan tangent et de distance en géométrie de la sphère.

2.4.2 Fiche n° 13 : Le produit scalaire

On considère les points :
$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Etudier les variations de l'amplitude des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CMB}$ lorsque le point M parcourt la droite CD. Représenter les deux fonctions obtenues sur le même graphique.

2.4.2.1 Solution commentée

Visualisons tout d'abord la situation sur un dessin.



Pour calculer l'amplitude d'un angle dans un triangle (quelconque), on utilise la forme généralisée du théorème de Pythagore dès que l'on connaît la longueur de tous les côtés.

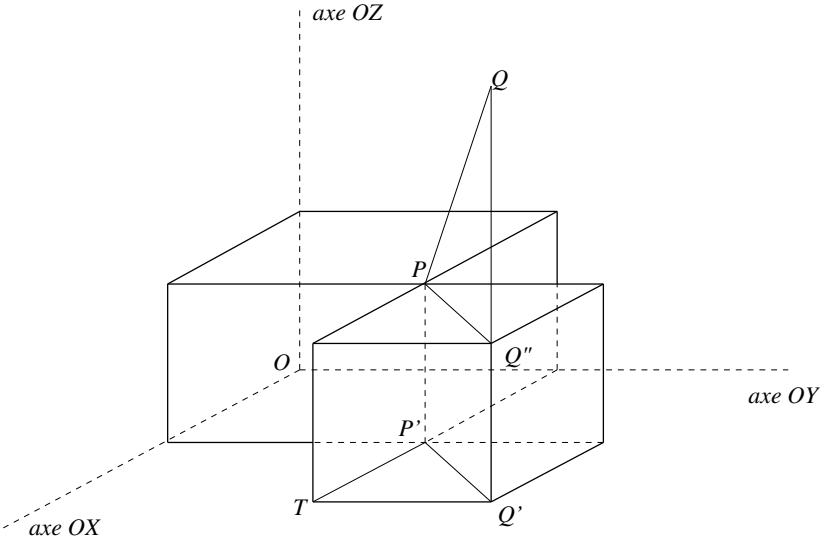
L'énoncé permet évidemment de supposer que les coordonnées des points A et B sont connues, ainsi que celles du point $M = M(t)$, ces dernières étant des fonctions d'un paramètre t déduites de l'équation vectorielle de la droite CD.

Cela suggère d'obtenir d'abord une formule permettant de calculer la distance qui sépare deux points en termes de leurs coordonnées et d'en déduire ensuite, à partir de la forme généralisée du théorème de Pythagore, une formule permettant de calculer l'amplitude d'un angle déterminé par trois points en termes de leurs coordonnées.

Distance entre deux points

On considère deux points :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$



L'application du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $PQ"Q$ et $P'TQ'$ donne :

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PQ"|^2 + |Q"Q|^2 \\ &= |P'Q'|^2 + |Q"Q|^2 \\ &= |P'T|^2 + |TQ'|^2 + |Q"Q|^2 \\ &= (q_1 - t_1)^2 + (q_2 - t_2)^2 + (q_3 - t_3)^2 \end{aligned}$$

On appelle norme du vecteur-colonne $Q - P$ et on note $\|Q - P\|$ la distance qui sépare le point P du point Q.

La formule précédente s'écrit alors :

$$\boxed{|PQ|^2 = (q_1 - t_1)^2 + (q_2 - t_2)^2 + (q_3 - t_3)^2 = \|Q - P\|^2}$$

et on l'appelle parfois la *formule de la norme*.

Dans le cas particulier où $Q = O$, on obtient :

$$|OP|^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 = \|P\|^2$$

qui calcule la distance séparant le point P de l'origine des coordonnées.

Angle déterminé par trois points

On commence par considérer le cas particulier de l'angle formé par les deux points :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

avec l'origine O.

On utilise la forme généralisée du théorème de Pythagore dans le triangle OUV afin d'y déterminer l'angle $\widehat{UOV}$:

$$|UV|^2 = |OU|^2 + |OV|^2 - 2.|OU|.|OV|.\cos\widehat{UOV}$$

Grâce à la formule de la norme, on en tire :

$$\begin{aligned}(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 + (v_3-u_3)^2 &= ({u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2) + ({v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2) \\ &\quad -2.|OU|.|OV|.\cos\widehat{UOV}\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}&{v_1}^2 - 2.v_1.u_1 + {u_1}^2 + {v_2}^2 - 2.v_2.u_2 + {u_2}^2 + {v_3}^2 - 2.v_3.u_3 + {u_3}^2 \\ &= {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 - 2.|OU|.|OV|.\cos\widehat{UOV}\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient l'égalité remarquable :

$$|OU|.|OV|.\cos\widehat{UOV} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

que l'on peut aussi écrire en termes de vecteurs-colonnes :

$$\|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

On considère maintenant les trois points :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

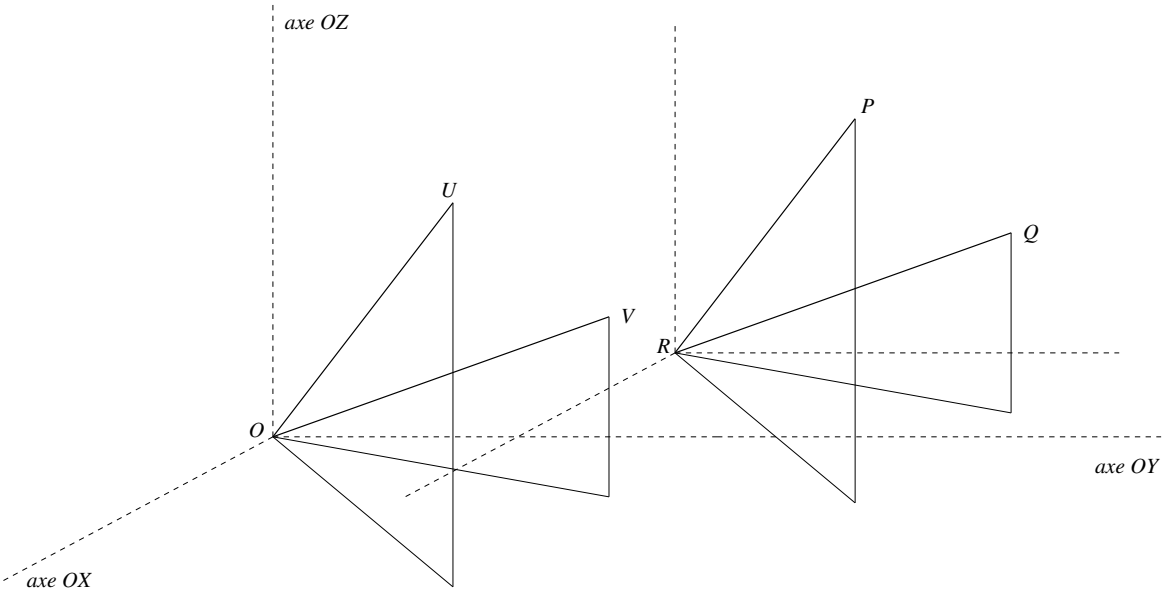
et il s'agit de déterminer l'angle $\widehat{PRQ}$.

On introduit les points U et V définis par :

$$U = P - R$$
$$V = Q - R$$

La translation qui applique l'origine O sur le point R envoie le point U sur le point P et le point V sur le point Q, puisque :

$$U + (R - O) = P - R + R = P$$
$$V + (R - O) = Q - R + R = Q$$



On en déduit :

$$\widehat{PRQ} = \widehat{UOV}$$

d'où :

$$\|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV} = \|P - R\|.\|Q - R\|.\cos\widehat{PRQ}$$

D'autre part, d'après l'égalité remarquable obtenue plus haut :

$$\|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV} = (p_1 - r_1).(q_1 - r_1) + (p_2 - r_2).(q_2 - r_2) + (p_3 - r_3).(q_3 - r_3)$$

Ainsi :

$$\|P - R\|.\|Q - R\|.\cos\widehat{PRQ} = (p_1 - r_1).(q_1 - r_1) + (p_2 - r_2).(q_2 - r_2) + (p_3 - r_3).(q_3 - r_3)$$

Cela permet de calculer l'angle formé par les trois points P, R et Q en fonction de leurs coordonnées :

$$\cos \widehat{PRQ} = \frac{(p_1 - r_1).(q_1 - r_1) + (p_2 - r_2).(q_2 - r_2) + (p_3 - r_3).(q_3 - r_3)}{\sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 + (p_3 - r_3)^2}.\sqrt{(q_1 - r_1)^2 + (q_2 - r_2)^2 + (q_3 - r_3)^2}}$$

Notion de produit scalaire

Dans le raisonnement précédent, le résultat-clef est l'égalité :

$$\|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Cette égalité est remarquable parce que le membre de gauche est indépendant des coordonnées des points U et V, alors que le membre de droite ne dépend — et très symétriquement — *que* des coordonnées de U et V.

Par ailleurs, on peut observer que la forme de cette égalité ne permet pas seulement de calculer un angle. En effet, dans le cas particulier où on y fait :

$$U = V = Q - P$$

alors :

$$\widehat{UOV} = 0$$

et

$$\|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV} = \|U\|^2 = \|Q - P\|^2$$

tandis que :

$$u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2$$

de telle sorte que l'égalité permet aussi de retrouver la formule de la norme :

$$\|Q - P\|^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2$$

La possibilité d'attacher à une expression simple qui ne dépend que des coordonnées une signification géométrique en termes de mesures d'angles et de distances souligne l'intérêt très particulier que revêt cette égalité.

Ainsi, et en conclusion, on appelle *produit scalaire* des vecteurs-colonnes U et V, et on note $U \bullet V$, le nombre réel défini par :

$$U \bullet V = \|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV}$$

et on a alors la formule :

$$U \bullet V = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

On déduit immédiatement de la définition ou de la formule les propriétés suivantes :

- Si U et $V \neq 0$: $U \bullet V = 0 \iff OU$ est perpendiculaire à OV.
- $U \bullet V = V \bullet U$ (commutativité)
- $(a.U + b.V) \bullet W = a.(U \bullet W) + b.(V \bullet W)$ (linéarité ou plutôt *bi*linéarité, compte tenu de la commutativité)

Retour à l'énoncé

On commence par calculer les coordonnées du point variable M sur la droite déterminée par les points C et D.

De l'équation vectorielle :

$$M = M(t) = C + t.(D - C)$$

on tire :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -1+2t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avant d'utiliser le produit scalaire, on calcule d'abord :

$$\begin{aligned} A - M(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-2t \\ -1+2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2t \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix} \\ B - M(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-2t \\ -1+2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2-2t \\ 2 \end{pmatrix} \\ C - M(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-2t \\ -1+2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On calcule alors successivement les angles $\widehat{AM(t)B}$ et $\widehat{CM(t)B}$:

1. Ecrivons le produit scalaire

$$(A - M(t)) \bullet (B - M(t)) = 2t.(-2 + 2t) + (2 - 2t)(-2t) + 2.2 = 8t^2 - 8t + 4$$

D'autre part, par la formule de la norme :

$$\|A - M(t)\| = \|B - M(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (2 - 2t)^2 + (2)^2} = \sqrt{8t^2 - 8t + 8}$$

Ainsi finalement :

$$\begin{aligned}
\cos \widehat{AM(t)B} &= \frac{(B - M(t)) \bullet (A - M(t))}{\|B - M(t)\|.\|A - M(t)\|} \\
&= \frac{8t^2 - 8t + 4}{8t^2 - 8t + 8} \\
&= \frac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2} \\
&= 1 - \frac{1}{2t^2 - 2t + 2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{t^2 - t + 1}
\end{aligned}$$

Le plus grand angle $\widehat{AM(t)B}$ possible est celui dont le cosinus est minimal. C'est le cas lorsque $t^2 - t + 1$ est minimal, en $t = \frac{1}{2}$ comme nous l'indique la dérivée de cette expression.

Pour $t = \frac{1}{2}$, on a $\cos(\widehat{AM(t)B}) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3/4} = \frac{1}{3}$. L'angle maximal vaut donc $\arccos \frac{1}{3} = 1.230959417$ rad ou encore 70°31′43"6.

2. De façon analogue, on a

$$(C - M(t)) \bullet (B - M(t)) = (2t).(2t) + (2 - 2t)(-2t) + (0.2) = 8t^2 - 4t$$

et

$$\|C - M(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = 2\sqrt{2}|t|$$

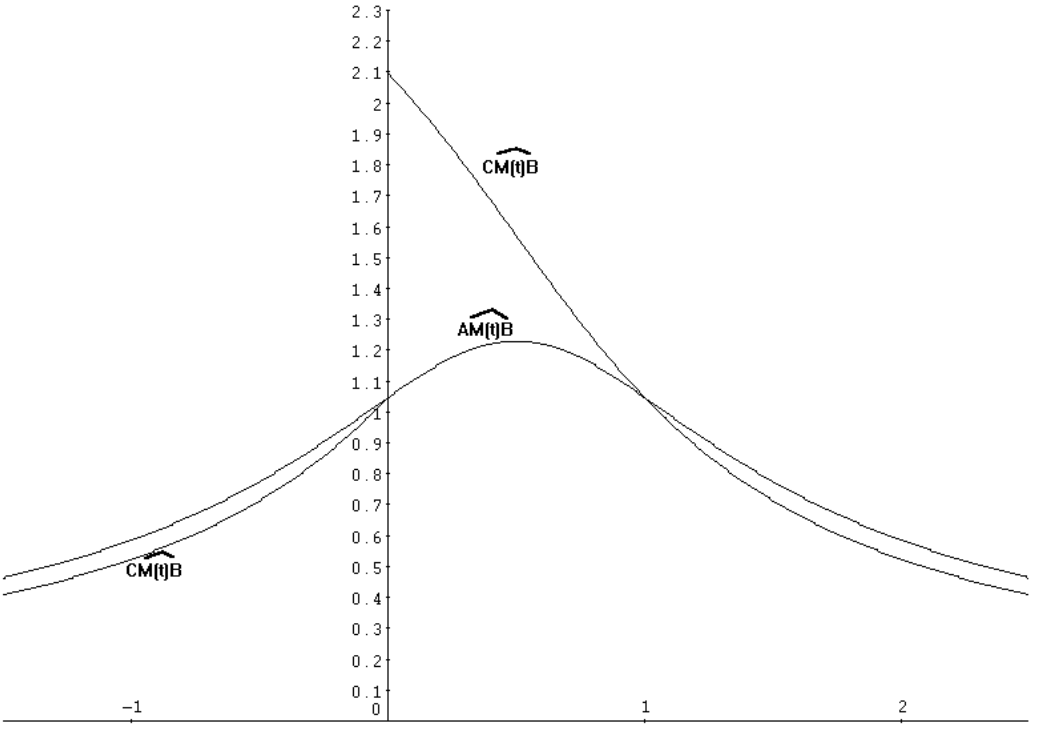
Le vecteur $C - M(t)$ est nul si $t = 0$. Il est difficile de parler dans ce cas de l'angle $\widehat{CM(t)B}$. Les calculs qui suivent supposent donc $t \neq 0$.

On a alors,

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{CM(t)B}) &= \frac{(C - M(t)) \bullet (B - M(t))}{\|C - M(t)\|.\|B - M(t)\|} \\
&= \frac{4t(2t - 1)}{2\sqrt{2}|t|\sqrt{8t^2 - 8t + 8}} \\
&= \frac{4t(2t - 1)}{8|t|\sqrt{t^2 - t + 1}} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\frac{2t - 1}{\sqrt{t^2 - 2t + 1}}
\end{aligned}$$

où sgn(t) est le *signe de* t : +1 si t est positif, -1 si t est négatif.

On remarque immédiatement que la fonction $\cos(\widehat{CM(t)B})$ vaut 0, donc que l'angle $\widehat{CM(t)B}$ vaut un droit, si $t = 1/2$. Lorsque t tend vers $\pm\infty$, le cosinus tend vers 1 et l'angle vers 0. Une autre caractéristique remarquable est que la fonction $\widehat{CM(t)B}$ est discontinue en 0.



La représentation des deux fonctions sur le même graphique fait apparaître clairement que l'angle $\widehat{AM(t)B}$ est maximal lorsque $B - M(t)$ est perpendiculaire à CD. On notera que dans ce cas, $A - M(t)$ est aussi perpendiculaire à CD et que $M(t)$ est le milieu de $[C, D]$.

2.4.2.2 Commentaires et prolongements

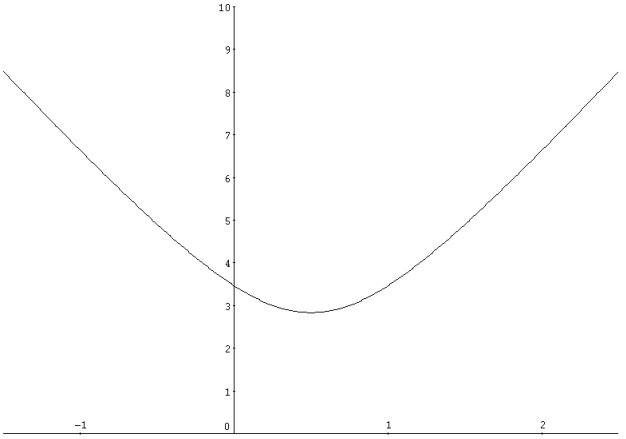
Le rectiligne d'un dièdre

Il est clair qu'avec la situation qui vient d'être étudiée, nous sommes à un cheveu de la définition du rectiligne d'un dièdre, c'est-à-dire de l'angle de deux plans. Mais auparavant, il convient de rencontrer les propriétés élémentaires de la perpendicularité entre droites et plans. C'est ce que prépare la fiche n° 14. La bilinéarité du produit scalaire jouera un rôle crucial dans cette étude.

Encore une variation de fonction

Avec les mêmes données que précédemment, étudions la variation de la mesure de l'aire du triangle AMB. On a :

$$\begin{aligned} S = S(t) &= \frac{1}{2}.|BM(t)|.|AM(t)|.|\sin \widehat{AM(t)B}| \\ &= \frac{1}{2}.\|A - M(t)\|^2.\sqrt{1 - \cos^2 \widehat{AM(t)B}} \\ &= \frac{1}{2}.(8t^2 - 8t + 8).\sqrt{1 - \frac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2}} \\ &= 2.\sqrt{4t^2 - 4t + 3} \end{aligned}$$



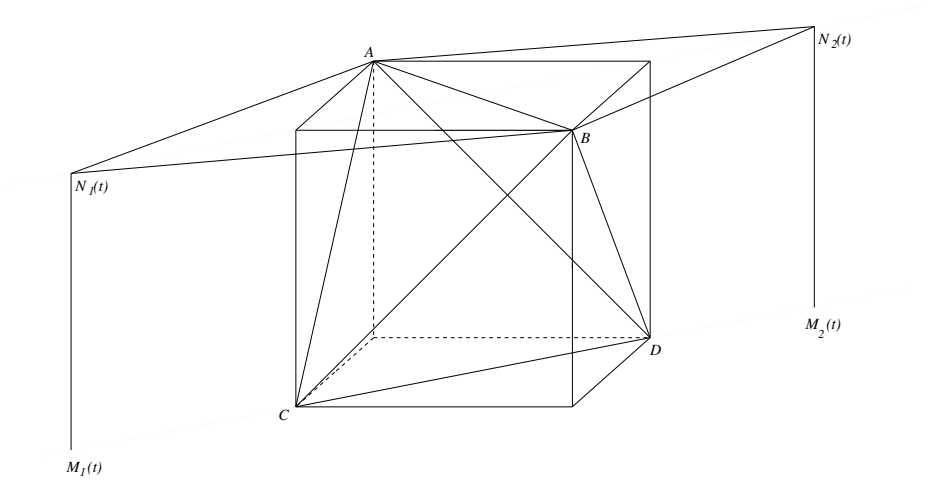
On observera que :

$$\lim_{t \to \pm\infty} \widehat{AM(t)B} = 0$$
$$\lim_{t \to \pm\infty} S(t) = \infty$$

Le graphe de la fonction $S(t)$ admet deux asymptotes obliques :

$$S = \pm 2.(2t - 1)$$

puisque $S(t) = 2.\sqrt{(2t-1)^2 + 2}$. Ces asymptotes ont une interprétation géométrique : $2.(2t-1)$ est précisément l'aire du triangle $AN(t)B$, où $N(t)$ est le point situé à la verticale du point $M(t)$ sur la médiatrice de AB parallèle à la droite CD.


A
B
C
D
$N_1(t)$
$N_2(t)$
$M_1(t)$
$M_2(t)$

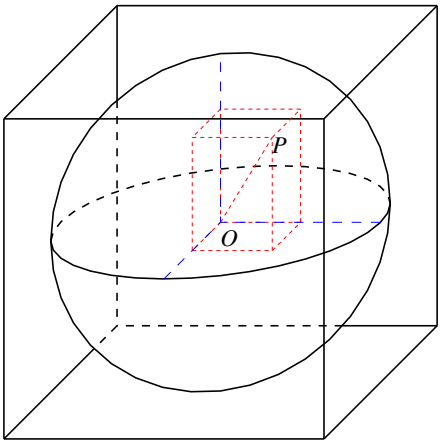
2.4.3 Fiche n° 14 : Sphères et plans

Existe-t-il un plan n'ayant qu'un seul point commun avec une sphère ?
Comment le caractériser ?

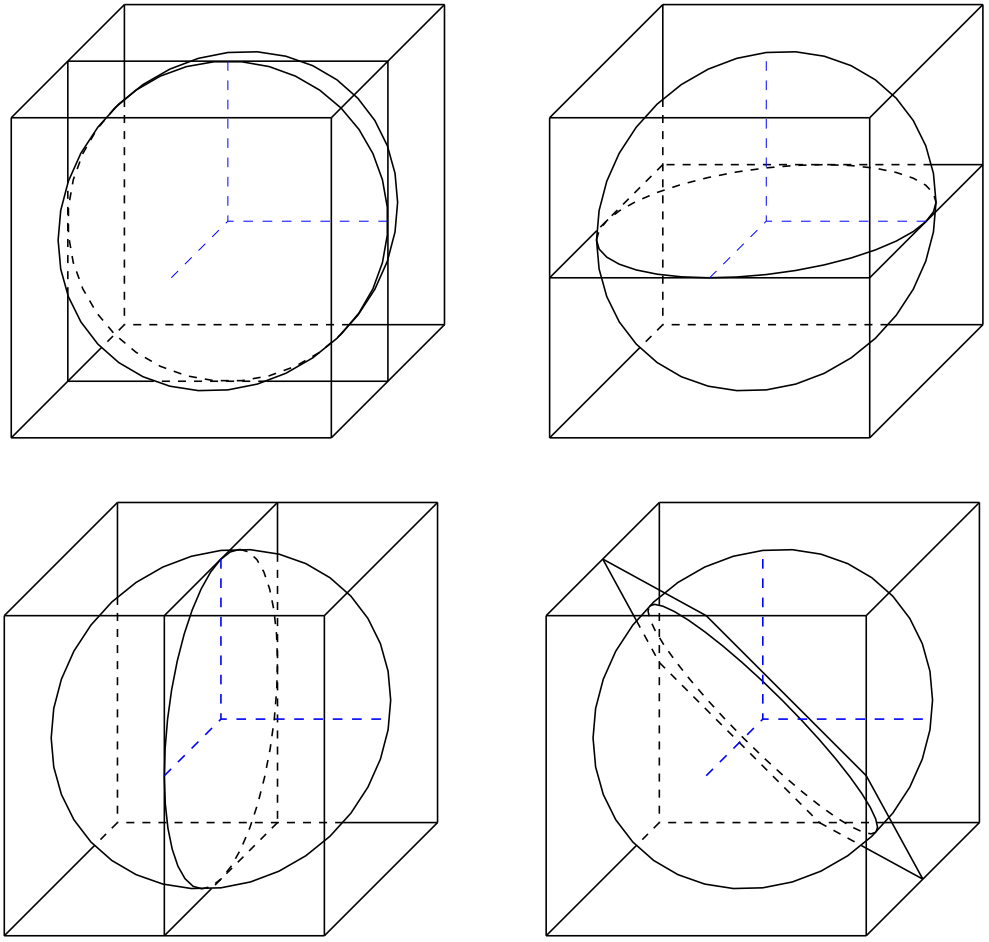
2.4.3.1 Solution commentée

On note $S^2(R)$ la sphère de rayon R centrée en l'origine des coordonnées. C'est le lieu géométrique des points de l'espace situés à une distance R de l'origine :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in S^2(R) \iff \|P\|^2 = R^2 \text{ ou } p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = R^2$$



Tout plan *passant par l'origine* coupe la sphère suivant une courbe plane dont tous les points sont encore situés à la même distance R de l'origine. Cette courbe est donc un cercle de même rayon que celui de la sphère : on l'appelle un *grand* cercle, au sens où il est manifestement impossible de trouver un cercle qui soit une section plane de la sphère et dont le rayon soit (strictement) supérieur à R.

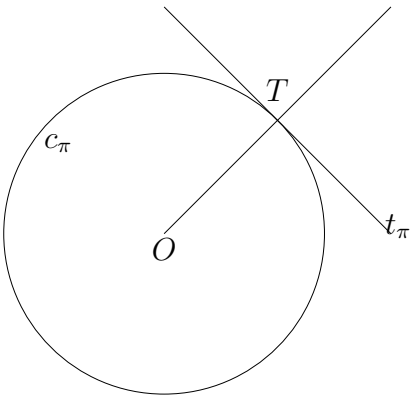


Soit T un point quelconque sur la sphère. On note :

π *un* plan contenant les points O et T,

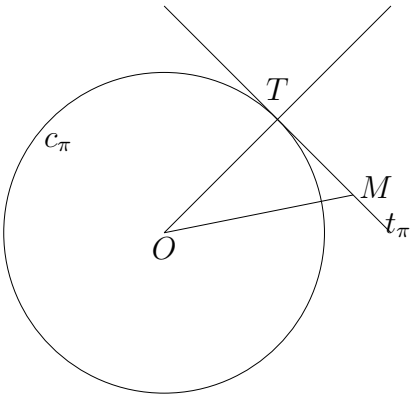
c_π le grand cercle déterminé par le plan π,

t_π la perpendiculaire (dans le plan π) en T à la droite OT.



La droite t_π n'a *que* le point T comme point commun avec le cercle c_π :

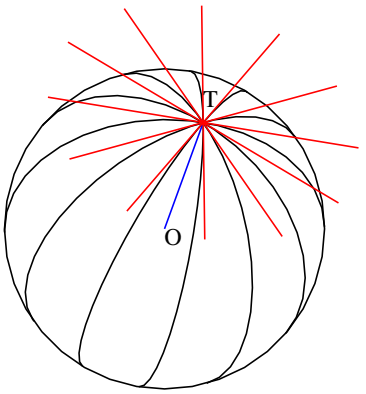
$$\forall M \in t_\pi : M \neq T \iff \|M - O\| > R$$



Cela résulte facilement par exemple du théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OTM.

Cette droite est *tangente dans le plan* π au grand cercle c_π. Chaque plan π passant par O et T contient ainsi une (seule) droite t_π

- qui est perpendiculaire à la droite OT en T
- dont aucun des points — sauf T — n'appartient à la sphère $S^2(R)$.



Il s'agit de montrer que l'ensemble des points de toutes ces droites est un plan. Notons τ l'ensemble des points de toutes ces droites : il existe des ensembles de droites toutes concourantes en un même point et qui *ne* sont *pas* coplanaires. Par exemple, un cône (circulaire droit) est formé de droites toutes concourantes au sommet du cône.

Par définition de τ, si X est un point différent de T, on a

$$X \in \tau \iff TX \perp OT$$

ou encore, en utilisant le produit scalaire :

$$X \in \tau \iff (X - T) \bullet T = 0$$

puisque dès que $X \neq T$: $X \in \tau \iff \widehat{OTX} = \frac{\pi}{2}$.

Or, si on pose :

$$T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in S^2(R) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$(X - T) \bullet T = 0 \iff (x_1 - a_1).a_1 + (x_2 - a_2).a_2 + (x_3 - a_3).a_3 = 0$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} (x_1 - a_1).a_1 + (x_2 - a_2).a_2 + (x_3 - a_3).a_3 &= a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 - ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2) \\ &= a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 - R^2 \end{aligned}$$

puisque $T \in S^2(R)$, de telle sorte que :

$$(X - T) \bullet T = 0 \iff a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 = R^2$$

Cette dernière relation est une équation cartésienne d'un *plan* passant par le point T.

En conclusion, on a ainsi établi que l'ensemble τ est un *plan*, dont le seul point de contact avec la sphère $S^2(R)$ est le point T.

2.4.3.2 Commentaires et prolongements

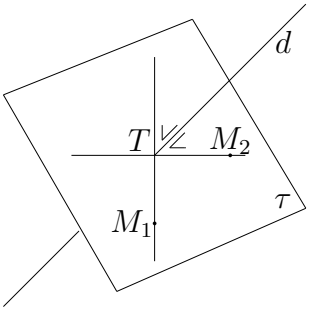
Perpendicularité droite–plan

Commençons par établir la propriété suivante :

PROPOSITION 2.4.1 *Une droite d est perpendiculaire en un point T à deux droites d_1 et d_2 sécantes en T, si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan déterminé par d_1 et d_2 passant par T.*

Il suffit évidemment de démontrer la seule propriété : *Si la droite d est perpendiculaire à d_1 et d_2, elle est perpendiculaire à toute droite du plan déterminé par d_1 et d_2 passant par T.*

On peut établir ce résultat *sans* passer par l'équation *cartésienne* du plan déterminé par les droites d_1 et d_2.



On note τ le plan déterminé par les deux droites d_1 et d_2 sécantes en T, et on considère des points M_1 et M_2 vérifiant les conditions :

$$M_1 \in d_1, \quad M_1 \neq T \quad M_2 \in d_2 \quad M_2 \neq T$$

Puisque d est perpendiculaire à d_1 et d_2 :

$$\forall D \in d : \begin{cases} (D-T) \bullet (M_1 - T) = 0 \\ (D-T) \bullet (M_2 - T) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de prouver que pour tout $M \in \tau$ et pour tout $D \in d$:

$$(D-T) \bullet (M-T) = 0$$

Or

$$M \in \tau \Longrightarrow \exists k, l \in \mathbb{R} \ : \ M - T = k.(M_1 - T) + l.(M_2 - T)$$

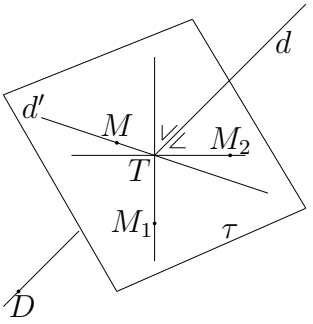
Dès lors, quel que soit $D \in d$:

$$\begin{aligned} (D-T) \bullet (M-T) &= (D-T) \bullet (k.(M_1-T) + l.(M_2-T)) \\ &= k.((D-T) \bullet (M_1-T)) + l.((D-T) \bullet (M_2-T)) \\ &= k.0 + l.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La proposition est ainsi établie. Cette proposition ne règle pas complètement la question de la perpendicularité d'une droite et d'un plan. Nous venons de voir que si la droite d est perpendiculaire à d_1 et d_2, elle est perpendiculaire à toute droite du plan engendré par d_1 et d_2 et passant par le point T. Il reste à prouver que toute droite d' passant par T et perpendiculaire à d est située dans le plan engendré par d_1 et d_2.

De cette façon, nous pourrons dire que le plan engendré par d_1 et d_2 est exactement l'ensemble des points M tels que $d \perp MT$.

PROPOSITION 2.4.2 *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, toute droite d' perpendiculaire en T à d est située dans le plan déterminé par d_1 et d_2.*



Considérons un point $M \in d'$ avec $M \neq T$ ainsi qu'un point $D \in d$ avec $D \neq T$. Les points M_1, M_2, D et T sont non coplanaires : il existe donc r, s et $t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M - T = r.(M_1 - T) + s.(M_2 - T + t.(D - T)$$

Dès lors, puisque $d \perp d'$:

$$\begin{aligned} 0 &= (D-T) \bullet (M-T) \\ &= r.(D-T) \bullet (M_1 - T) + s.(D-T) \bullet (M_2 - T) + t.(D-T) \bullet (D-T) \\ &= r.0 + s.0 + t.(D-T) \bullet (D-T) \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$0 = t.\|D - T\|^2$$

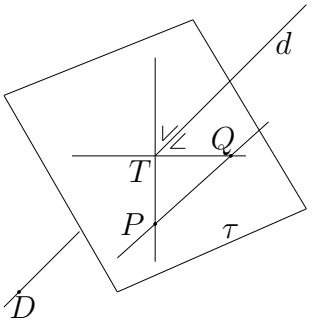
Mais $D \neq T$. Dès lors $t = 0$, et

$$M - T = r.(M_1 - T) + s.(M_2 - T)$$

Autrement dit le point M appartient au plan engendré par d_1 et d_2, et la droite d' est située dans ce même plan.

Les deux propositions précédentes justifient la définition de « droite perpendiculaire à un plan » :

Définition 2.4.3 *Une droite d est perpendiculaire à un plan τ si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites de τ qui lui sont sécantes.*



Remarque
Si la droite d est perpendiculaire au plan τ, si $d \cap \tau = \{T\}$ et si D est un point de d différent de T, alors quels que soient les points P et $Q \in \tau$, on a :

$$\begin{aligned} (Q-P) \bullet (D-T) &= (Q - T + T - P) \bullet (D-T) \\ &= (Q-T) \bullet (D-T) + (T-P) \bullet (D-T) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Définition 2.4.4 *On dit que la droite Δ déterminée par P et Q est orthogonale à la droite d lorsqu'elle est incluse dans un plan perpendiculaire à d sans avoir nécessairement de point commun avec d.*

Vecteur orthogonal à un plan

Considérons à présent un plan α d'équation cartésienne

$$ax + by + cz = d$$

et cherchons à déterminer *toutes* les droites perpendiculaires à ce plan.

Il est tout à fait remarquable que la réponse est consignée intégralement dans l'équation cartésienne elle-même. Considérons d'abord le plan α_0 parallèle à α et passant par l'origine. Il a pour équation cartésienne

$$ax + by + cz = 0$$

Nous en déduisons l'équivalence logique

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha_0 \Leftrightarrow M \bullet A = 0$$

où A est le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ou encore :

Le point M appartient au plan α_0 si et seulement si les droites OM et OA sont perpendiculaires.

Le plan α_0 est donc le plan perpendiculaire à OA passant par l'origine.

Au lieu de $OM \perp OA$, nous écrirons

$$M \perp A$$

et nous dirons que les vecteurs M et A sont perpendiculaires (ou orthogonaux). Ainsi

$$M \in \alpha_0 \iff M \perp A \iff M \bullet A = 0$$

Le plan α_0 est donc entièrement déterminé par le vecteur A, ce qui est normal puisque les coordonnées de A sont les coefficients de l'équation de α_0, mais ce qui fournit de plus une interprétation géométrique extrèmement importante de l'équation cartésienne d'un plan.

Nous voyons aussi que deux vecteurs perpendiculaires à α_0 sont nécessairement proportionnels : si $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont tous deux perpendiculaires à α_0, ce plan admet les deux équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'x + c'z = 0$. Ces deux équations sont donc proportionnelles, autrement dit les deux vecteurs A et A' sont eux-mêmes proportionnels.

A présent, nous pouvons affirmer que les droites perpendiculaires à α sont simplement les droites parallèles à OA. Une telle droite d possède une équation vectorielle $P = U + kA$. Si son point de percée dans α est V, et si M est un point quelconque de α, on a

$$(M - V) \bullet (V - U) = (M - V) \bullet (kA) = k.((M - V) \bullet A)$$

et ce résultat vaut 0 puisque $M - V \in \alpha_0$.

Distance sphérique

Avant d'abandonner la géometrie de la sphère, il nous semble opportun de parler un peu du problème de la plus courte distance entre deux points *sur* une sphère.

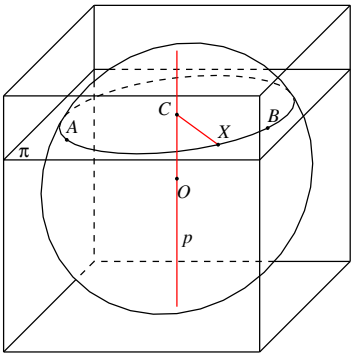
Nous allons esquisser une démonstration analytique du résultat suivant :

> Si A et B sont deux points distincts et non diamétralement opposés sur une sphère, la distance minimale qui sépare A de B (mesurée sur une section plane) est obtenue sur l'unique arc de grand cercle passant par A et B.

La démonstration s'effectue en trois étapes

– *Toute* section plane de la sphère $S^2(R)$ est un cercle de rayon $0 \leqslant \rho \leqslant R$.

Soit π un plan quelconque passant par A et B ; on trace la droite p perpendiculaire au plan π et issue de O (la fiche suivante étudiera en détails cette construction). La droite p coupe le plan π au point C.



Quel que soit $X \in S^2(R) \cap \pi$, et par construction, la droite déterminée par X et C est perpendiculaire à la droite déterminée par O et C, de telle sorte qu'on obtient par le théorème de Pythagore :

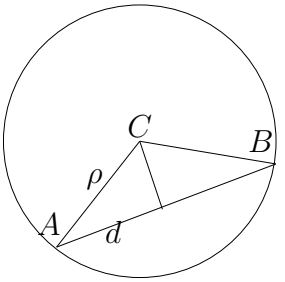
$$|XC|^2 = |OX|^2 - |OC|^2 = Cste$$

L'intersection $S^2(R) \cap \pi$ est donc le cercle de centre C et de rayon $\rho = \sqrt{R^2 - |OC|^2}$

– Si A et B sont deux points distincts de la sphère $S^2(R)$ séparés d'une distance rectiligne de $2d$ (avec $0 < d \leqslant R$) alors leur distance sphérique mesurée sur une section plane de rayon $\rho \leqslant R$ est donnée par :

$$\ell(\rho) = 2\rho.\arcsin\frac{d}{\rho}$$

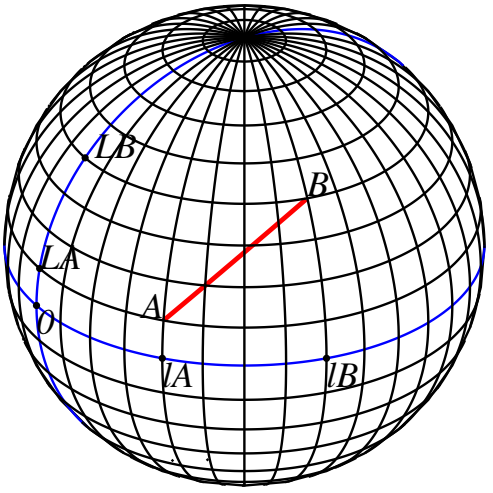
C'est une conséquence immédiate de la figure suivante :



– La fonction $\ell(\rho)$ est une fonction décroissante de ρ.
En effet, si ρ augmente, alors $\frac{d}{\rho} = \sin\frac{\ell(\rho)}{2}$ diminue. Mais la fonction sin est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de telle sorte que $\frac{\ell(\rho)}{2}$ diminue.

Comme la plus grande valeur que ρ puisse atteindre est R, cela correspond à la section plane passant par A, B et $C = 0$, c'est-à-dire un grand cercle.

Application : Distance de deux points sur le globe terrestre en fonction de leurs latitudes L et longitudes ℓ.



Si les données sont rapportées à une sphère de rayon 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \cos L_A.\cos\ell_A \\ \cos L_A.\sin\ell_A \\ \sin L_A \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos L_B.\cos\ell_B \\ \cos L_B.\sin\ell_B \\ \sin L_B \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\cos\widehat{AOB} &= A \bullet B \\ &= \cos L_A.\cos\ell_A.\cos L_B.\cos\ell_B + \cos L_A.\sin\ell_A.\cos L_B.\sin\ell_B + \sin L_A.\sin L_B \\ &= \cos L_A.\cos L_B.\cos(\ell_B - \ell_A) + \sin L_A.\sin L_B\end{aligned}$$

Si R est le rayon terrestre, on obtient :

$$dist_{S^2(R)}(A,B) = R.\arccos(\cos L_A.\cos L_B.\cos(\ell_B - \ell_A) + \sin L_A.\sin L_B)$$

2.4.4 Synthèse

A l'issue des situations décrites dans les fiches 13 et 14, nous retiendrons les constructions et les résultats suivants :

A propos du produit scalaire

On appelle produit scalaire des vecteurs colonnes

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

et on note $U \bullet V$ le nombre réel :

$$\|U\|.\|V\|.\cos\widehat{UOV} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes :

- Si U et $V \neq 0$: $U \bullet V = 0 \iff OU$ est perpendiculaire à OV.
- $U \bullet V = V \bullet U$ (commutativité)
- $(a.U + b.V) \bullet W = a.(U \bullet W) + b.(V \bullet W)$ (linéarité ou plutôt *bi*linéarité, compte tenu de la commutativité)

A propos de la perpendicularité entre droite et plan

Définitions

- Une droite d est perpendiculaire à un plan τ si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites de τ qui lui sont sécantes.
- On dit que la droite Δ déterminée par P et Q est *orthogonale* à la droite d lorsqu'elle est incluse dans un plan perpendiculaire à d sans avoir nécessairement de point commun avec d.

Théorèmes

- Une droite d est perpendiculaire en un point T à *deux* droites d_1 et d_2 sécantes en T, si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan déterminé par d_1 et d_2 passant par T.
- Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, toute droite d' perpendiculaire en T à d est située dans le plan déterminé par d_1 et d_2.

A propos d'un vecteur orthogonal à un plan

Si α est le plan d'équation cartésienne

$$ax + by + cz = d$$

si α_0 le plan parallèle à α passant par l'origine et donc d'équation cartésienne

$$ax + by + cz = 0$$

et si $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

- Le plan α_0 est le plan perpendiculaire à OA passant par l'origine.
- $M \in \alpha_0 \iff M \bullet A = 0$
- Le vecteur $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan α_0 et donc aussi au plan α. Toutes les droites perpendiculaires à α sont les droites parallèles à OA.

2.5. Produit vectoriel, volume et déterminant

2.5.1 Introduction

Cette section ne comporte qu'une seule fiche, consacrée au calcul du volume d'un prisme. C'est l'occasion d'introduire le produit vectoriel et le produit mixte ou déterminant dans un contexte géométrique. Différents commentaires et prolongements consacrés à l'équation normale d'un plan et aux questions d'orientation cloturent cette section et préparent la suivante.

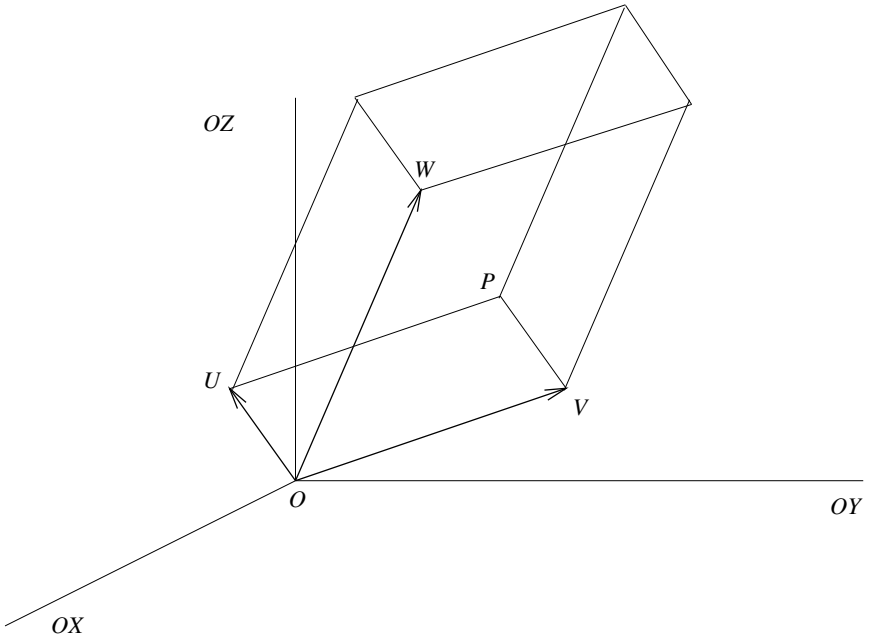
Il n'a pas été rédigé de synthèse pour cette section, les propriétés essentielles du produit vectoriel et du déterminant étant reprises également dans les commentaires et prolongements.

2.5.2 Fiche n° 15 : Produit vectoriel, volume et déterminant

On considère les points :

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le volume du prisme de côtés OU, OV et OW.
b. Plus généralement, si U, V et W sont trois points *quelconques* de l'espace, déterminer le volume du prisme de côtés OU, OV et OW en fonction des coordonnées de U, V et W.



2.5.2.1 Solution commentée

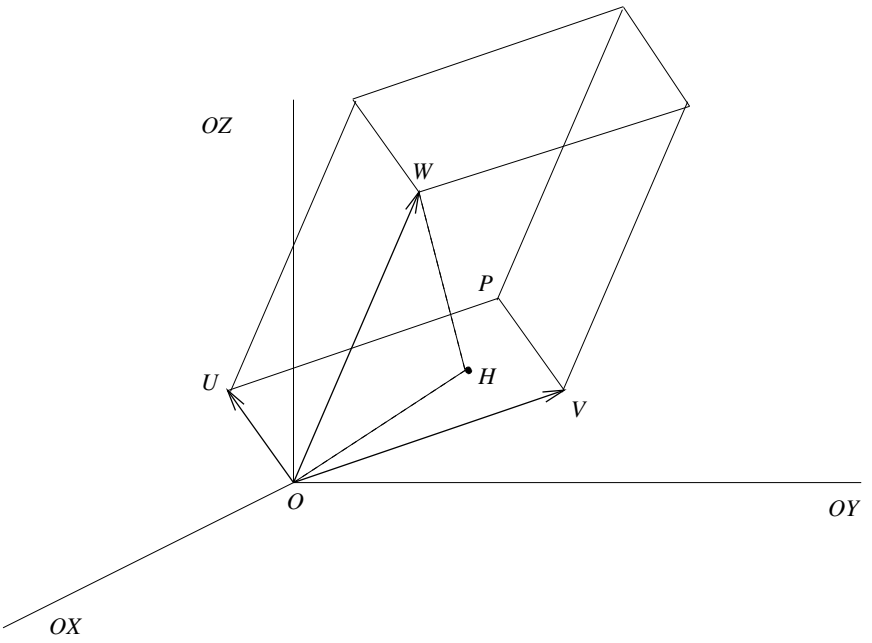
On sait que le volume d'un prisme se calcule grâce à la formule :

$$\textit{aire d'une base} \times \textit{hauteur correspondante}$$

Il s'agit donc de calculer :

– L'aire du parallélogramme $OUPV$

– La longueur du segment WH, où H est le pied de la perpendiculaire issue de W au plan OUV.



Aire du parallélogramme $OUPV$

On obtient l'aire du parallélogramme $OUPV$ grâce à la formule :

$$\text{aire } OUPV = base \times hauteur = \|U\|.\|V\|.|\sin \widehat{UOV}|$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(\text{aire } OUPV)^2 &= \|U\|^2.\|V\|^2.\sin^2\widehat{UOV} \\
&= \|U\|^2.\|V\|^2.(1-\cos^2\widehat{UOV}) \\
&= \|U\|^2.\|V\|^2. - \|U\|^2.\|V\|^2.\cos^2\widehat{UOV} \\
&= \|U\|^2.\|V\|^2 - (U \bullet V)^2
\end{aligned}$$

Dès lors, si

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

alors la forme précédente devient :

$$\begin{aligned}
(\text{aire } OUPV)^2 &= (u_1^2+u_2^2+u_3^2).(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \\
&= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - \\ & 2.u_1v_1u_2v_2 - 2.u_1v_1u_3v_3 - 2.u_2v_2u_3v_3 \\ = \; & u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2.u_1v_1u_2v_2 + u_1^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 - 2.u_1v_1u_3v_3 + \\ & u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 - 2.u_2v_2u_3v_3 \\ = \; & (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule permettant de calculer l'aire du parallélogramme déterminé par les points O, U et V à partir de leur coordonnées :

$$\text{aire } OUPV = \sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2}$$

Perpendiculaire à un plan issue d'un point de ce plan

Cette question a été étudiée dans les prolongements de la fiche n°14. Considérons donc un plan $\pi = OUV$ déterminé par trois points non alignés dont un est l' origine des coordonnées et dont les deux autres sont donnés par leurs coordonnées :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

On demande de déterminer la perpendiculaire $\pi_P^{\perp}$ au plan π passant par le point $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \pi$.

La connaissance de l'équation cartésienne de π nous fournirait immédiatement un vecteur perpendiculaire à π. Mais nous ne disposons pas de cette équation. Nous allons donc directement rechercher un vecteur N qui soit perpendiculaire à U et à V, qui satisfasse donc aux équations

$$\begin{cases} N \bullet U = 0 \\ N \bullet V = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 = 0 \\ N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de *deux* équations du premier degré en *trois* inconnues : N_1, N_2 et N_3 dont nous savons qu'il admet des solutions non nulles puisque les deux équations ne sont pas proportionnelles, les points U et V n'étant pas alignés avec l'origine. L'un au moins des nombres $u_1v_2 - u_2v_1$, $u_2v_3 - u_3v_2$ et $u_3v_1 - u_1v_3$ est donc non nul. Admettons que ce soit $u_1v_2 - u_2v_1$.

La solution algébrique du système est particulièrement intéressante, et ce, y compris du point de vue géométrique.

Si on multiplie la première équation par v_2, la seconde par u_2 et que l'on soustrait membre à membre, on obtient :

$$(u_1v_2 - u_2v_1).N_1 + (u_3v_2 - u_2v_3).N_3 = 0$$

Pareillement, si on multiplie la première équation par v_1 et la seconde équation par u_1 et que l'on soustrait membre à membre, on obtient :

$$(u_1v_2 - u_2v_1).N_2 + (u_1v_3 - u_3v_1).N_3 = 0$$

D'où un nouveau système de deux équations du premier degré à trois inconnues : N_1, N_2 et N_3.

$$\begin{cases} (u_1v_2 - u_2v_1).N_1 + (u_3v_2 - u_2v_3).N_3 = 0 \\ (u_1v_2 - u_2v_1).N_2 + (u_1v_3 - u_3v_1).N_3 = 0 \end{cases}$$

Maintenant, puisque nous avons supposé $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, on obtient immédiatement :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{N_3}{u_1v_2 - u_2v_1}.(u_2v_3 - u_3v_2) \\ N_2 = -\frac{N_3}{u_1v_2 - u_2v_1}.(u_1v_3 - u_3v_1) \end{cases}$$

En choisissant $N_3 = u_1v_2 - u_2v_1$, on arrive à la solution :

$$N = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Au cas où on aurait $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ mais $u_2v_3 - u_3v_2 \neq 0$ un calcul analogue aboutirait au même résultat. Il en serait encore de même si c'était $u_3v_1 - u_1v_3$ qui était différent de 0.

Nous avons ainsi déterminé un vecteur N perpendiculaire au plan déterminé par O, U et V. Mais — et c'est tout aussi remarquable — la formule obtenue plus haut et qui permettait de calculer l'aire du parallélogramme déterminé par les points O U et V s'interprète maintenant par : :

$$\text{aire } OUPV = \|N\|$$

On appelle *produit vectoriel* des vecteurs $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ le vecteur noté $U \times V$ défini par :

$$U \times V = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

dont on a ci-dessus établi les propriétés suivantes :

- $U \times V$ est perpendiculaire à OU et OV.
- $\|U \times V\|$ est l'aire du parallélogramme déterminé par O, U et V. En particulier :

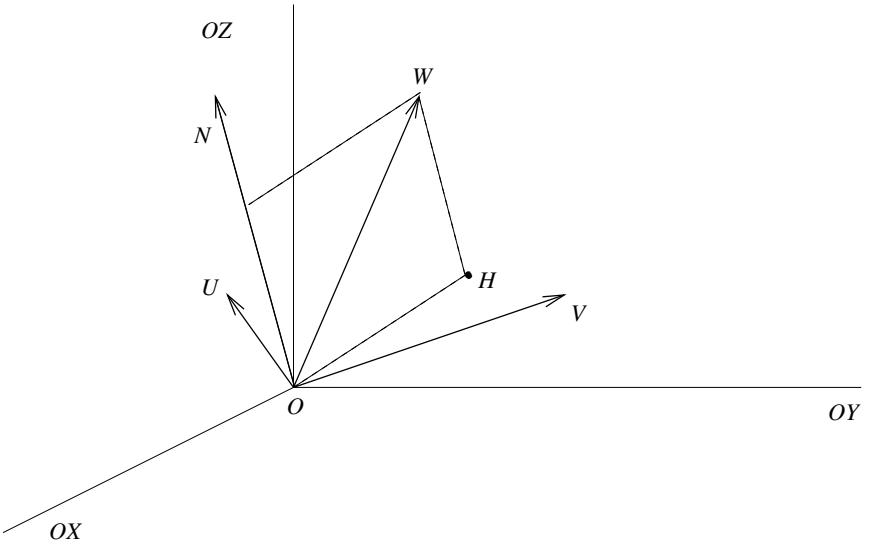
$$\|U \times V\| = \|U\|.\|V\|.|\sin \widehat{UOV}|$$

D'autres propriétés du produit vectoriel sont étudiées dans les prolongements qui suivent cette solution commentée.

Distance d'un point à un plan

Si W est un point quelconque de l'espace et H est le pied de la perpendiculaire abaissée de W sur le plan OUV, on déduit immédiatement de tout ce qui précède :

$$\begin{aligned} |N \bullet W| &= \|N\|.\|W\|.|\cos \widehat{NOW}| \\ &= \|N\|.|WH| \end{aligned}$$



d'où :

$$|WH| = \frac{|N \bullet W|}{\|N\|}$$

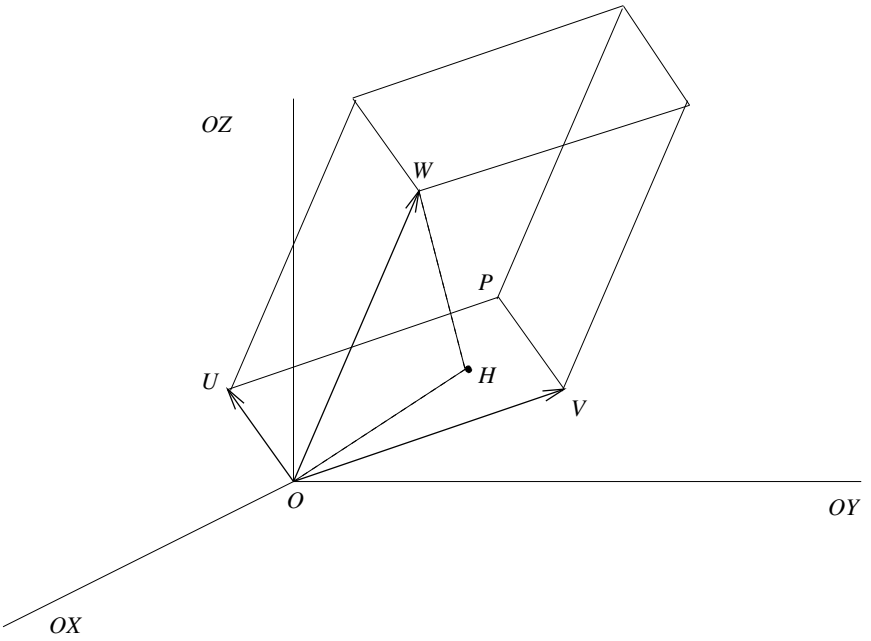
Retour au volume d'un prisme

Commençons par répondre à la question b en écrivant la formule *générale* à laquelle on arrive en conséquence des résultats déjà obtenus. Si on considère trois points :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{vol } OUVW &= (\text{aire } OUPV).|WH| \\ &= \|U \times V\| \cdot \frac{|N \bullet W|}{\|N\|} \\ &= \|U \times V\|.\frac{|(U \times V) \bullet W|}{\|U \times V\|} \\ &= |(U \times V) \bullet W| \end{aligned}$$



Or, on a :

$$U \times V = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} (U \times V) \bullet W &= (u_2v_3 - u_3v_2).w_1 - (u_1v_3 - u_3v_1).w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1).w_3 \\ &= u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - \\ &\quad u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 \end{aligned}$$

On appelle *déterminant* des trois vecteurs colonnes

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

le nombre réel noté $\det(U, V, W)$ défini par :

$$\begin{aligned} \det(U, V, W) &= (U \times V) \bullet W \\ &= u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 \end{aligned}$$

Le volume demandé à la question *a* s'écrit donc finalement :

$$\text{vol } \ OUVW = |8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2| = 4$$

D'autres propriétés du déterminant sont étudiées dans les prolongements ci-après.

2.5.2.2 Commentaires et prolongements

Equation normale d'un plan

Nous avons établi plus haut que le vecteur $U \times V$ est perpendiculaire au plan OUV et que sa norme est l'aire du parallélogramme $OUPV$. Il en résulte que le vecteur

$$n_\pi = \frac{U \times V}{\|U \times V\|}$$

est un vecteur de norme 1 également perpendiculaire à OUV. On l'appelle *le vecteur normal* au plan $\pi = OUV$.

De manière générale, la distance qui sépare un point W d'un plan π déterminé par trois points non alignés T, U et V est donc donnée par la formule :

$$dist(W, \pi) = |n_\pi \bullet (W - T)|$$

où

$$n_\pi = \frac{(U - T) \times (V - T)}{\|(U - T) \times (V - T)\|}$$

Si le plan π en question est décrit par une équation cartésienne :

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + B = 0$$

alors on tire facilement de tout ce qui précède que :

$$n_\pi = \frac{\pm 1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}. \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

et que pour tout point T de π,

$$\begin{aligned} n_\pi \bullet T &= \pm \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} A \bullet T \\ &= \pm \frac{-B}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \end{aligned}$$

de telle sorte que si $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} dist(W, \pi) &= |n_\pi \bullet (W - T)| \\ &= |n_\pi \bullet W - n_\pi \bullet T| \\ &= \frac{1}{\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}}.|A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3 + B| \end{aligned}$$

Une équation cartésienne d'un plan π :

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + B = 0$$

pour laquelle $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1$ est appelée une *équation normale* de ce plan. *Dans ce cas*, la formule qui exprime la distance du point W au plan est particulièrement simple :

$$dist(W, \pi) = |A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3 + B|$$

Propriétés du produit vectoriel

On a défini plus haut le produit vectoriel de $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ par

$$U \times V = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Une signification géométrique de ce nouveau produit a été dégagée à partir de deux propriétés établies en même temps que sa définition :

- $U \times V$ est orthogonal à U ainsi qu'à V,
- $\|U \times V\| = \|U\| \cdot \|V\| \cdot |\sin \widehat{UOV}|$ est l'aire du parallélogramme déterminé par O, U et V.

La *seule* définition de produit vectoriel entraîne immédiatement quelques propriétés remarquables.

D'abord, le produit vectoriel est bilinéaire, c'est-à-dire que, quels que soient les nombres réels a, b et c :

$$\begin{aligned} U \times (a \cdot X + b \cdot Y) &= a \cdot (U \times X) + b \cdot (U \times Y) \\ (a \cdot X + b \cdot Y) \times V &= a \cdot (X \times V) + b \cdot (Y \times V) \end{aligned}$$

Ensuite, le produit vectoriel est *antisymétrique*, c'est-à-dire

$$U \times V = -V \times U$$

Cette antisymétrie implique

$$U \times U = 0$$

Mais on a aussi plus généralement

$$U \times V = 0 \Leftrightarrow \ O, U \text{ et } V \text{ sont alignés}$$

On déduit par exemple de ces propriétés que dès que les trois points O, U et V ne sont pas alignés, alors $(U, V, U \times V)$ est une *base* de l'espace pointé en O, et que si (U, V) est une base orthonormée d'un plan contenant le point O, alors $(U, V, U \times V)$ est une base orthonormée de l'espace pointé en O.

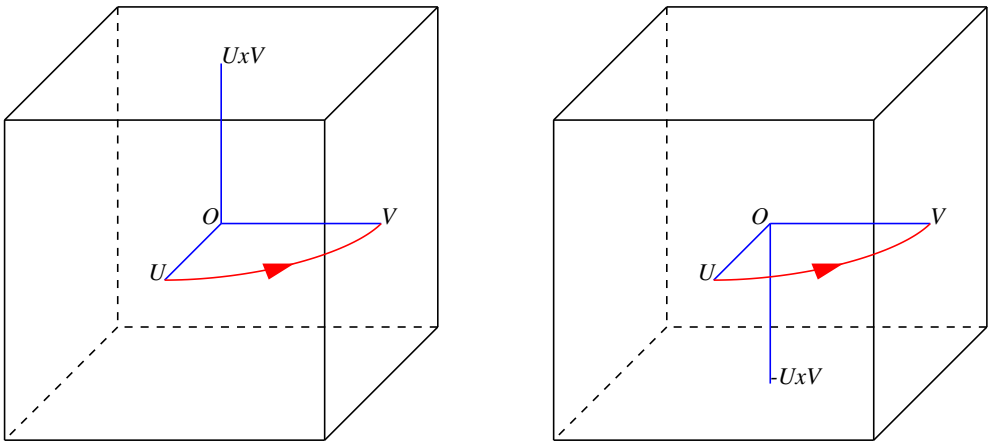
Orientation dans un plan

La propriété d'antisymétrie du produit vectoriel permet de définir une notion d'*orientation* dans un plan, de la manière suivante.

On appelle *axe* dans l'espace toute droite munie d'un repère. On note $(O; P)$ l'axe obtenu en munissant la droite OP du repère pour lequel O est le point d'abscisse 0 et P est le point d'abscisse 1. Si $(O; P)$ est un axe, et Π un plan contenant le point$O$ et perpendiculaire à l'axe, on dit qu'une base de Π définit une*orientation positive* de ce plan par rapport à l'axe, si le produit vectoriel $U \times V$ est un multiple positif de $P - O = P$. On dit alors aussi que le plan Π est*orienté conformément à l'axe* par le choix de la base (U, V).

Dans le cas où le produit vectoriel $U \times V$ est un multiple négatif de $P - O = P$, on dit que la base (U, V) définit une orientation négative du plan Π par rapport à l'axe, ou que le plan Π est*orienté contrairement à l'axe* par le choix de la base (U, V).

La propriété d'antisymétrie du produit vectoriel signifie alors qu'une permutation des éléments de la base (U, V) choisie change l'orientation du plan Π considéré.



D'un point de vue « physique », un observateur dont les pieds sont en O et la tête au point $U \times V$, et qui regarde le mouvement qui amène U sur V décrira ce mouvement comme allant « de la droite vers la gauche » (dextrogyre) ou « de la gauche vers la droite » (lévogyre) selon la position relative des points U et V par raport à lui.. Un observateur dont les pieds sont en O et la tête en $-U \times V$, et qui regarde le même mouvement le décrira allant dans le sens opposé du précédent. Le changement de sens du mouvement est traduit par le changement de signe dans le produit vectoriel. La définition donnée ci-dessus de l'orientation d'un plan peut être formulée *sans* faire référence à un axe.

Si (U, V) et (W, Z) sont deux bases d'un même plan pointé en O, il existe donc quatre nombres réels a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} W = a \cdot U + b \cdot V \\ Z = c \cdot U + d \cdot V \end{cases}$$

On calcule alors, grâce à la bilinéarité et à l'antisymétrie du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} W \times Z &= (a \cdot U + b \cdot V) \times (c \cdot U + d \cdot V) \\ &= ac \cdot (U \times U) + ad \cdot (U \times V) + bc \cdot (V \times U) + bd \cdot (V \times V) \\ &= (ad - bc) \cdot (U \times V) \end{aligned}$$

Ainsi, les bases (U, V) et (W, Z) définissent la *même* orientation du plan qu'elles engendrent dès que la quantité $ad - bc$ est *positive*, et elles définissent des orientations *opposées* de ce plan dès que la quantité $ad - bc$ est négative. Il est par ailleurs facile de constater que $ad - bc$ ne peut pas égaler 0, car sinon les points O, W et Z seraient alignés ...

La notion d'orientation d'un plan est ainsi une notion *relative* : elle permet de préciser quand deux bases d'un même plan définissent une même orientation de ce plan, ou deux orientations opposées de ce plan.

Angle orienté dans un plan orienté

On convient dans la suite d'exprimer les angles en radians, et donc de les représenter par des nombres réels compris entre $-\pi$ et π.

Le produit scalaire permet de calculer le cosinus de l'angle déterminé par deux vecteurs, d'où on peut déduire la *valeur absolue* de cet angle.

Le produit vectoriel permet de définir le *signe* de cet angle, pourvu que le plan déterminé par les deux vecteurs soit muni d'une orientation.

Plus précisément, si Π est un plan contenant l'origine$O$ des coordonnées et orienté par le choix d'une base (U, V) de ce plan, et si X et Y sont deux points de ce plan avec $X \neq O$, $Y \neq O$, l'angle orienté $\widehat{XOY}$ est, par définition, l'unique nombre réel tel que

$$\begin{cases} -\pi < \widehat{XOY} \leqslant \pi \\ \cos \widehat{XOY} = \frac{X \bullet Y}{\|X\| \cdot \|Y\|} \\ X \times Y = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \sin \widehat{XOY} \cdot K \end{cases}$$

où K est le vecteur unitaire de même sens que $U \times V$:

$$K = \frac{1}{\|U\| \cdot \|V\|} \cdot U \times V$$

Aire orientée dans un plan orienté

Si Π est un plan contenant l'origine$O$ des coordonnées et orienté par le choix d'une base (U, V) de ce plan, et si X et Y sont deux points de ce plan, on appelle *aire orientée* déterminée par X et Y, et on note $A(X, Y)$, le *nombre réel* défini par

$$X \times Y = A(X, Y) \cdot K$$

où, comme ci-dessus, $K = \frac{1}{\|U\| \cdot \|V\|} \cdot U \times V$ est le vecteur unitaire de même sens que $U \times V$.

En ce sens, il s'agit d'une mesure d'aire *relative* à la base (U, V).

Dans le cas particulier où (U, V) est une base orthonormée du plan Π , et si

$$\begin{cases} X = a \cdot U + b \cdot V \\ Y = c \cdot U + d \cdot V \end{cases}$$

on calcule comme plus haut :

$$\begin{aligned} X \times Y &= (a \cdot U + b \cdot V) \times (c \cdot U + d \cdot V) \\ &= ac \cdot (U \times U) + ad \cdot (U \times V) + bc \cdot (V \times U) + bd \cdot (V \times V) \\ &= (ad - bc) \cdot (U \times V) \\ &= (ad - bc) \times K \end{aligned}$$

de telle sorte qu'alors

$$A(X, Y) = ad - bc$$

Dans ce contexte d'un plan orienté par une base orthonormée, on appelle parfois l'aire orientée $A(X,Y)$: le déterminant 2×2 de X et Y.

Propriétés du déterminant 3×3

On a défini plus haut le déterminant de $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ par

$$\begin{aligned}\text{Dét }(U,V,W) &= (U\times V)\bullet W\\ &= \begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\-(u_1v_3-u_3v_1)\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}\\ &= u_1v_2w_3+v_1w_2u_3+w_1u_2v_3-u_3v_2w_1-v_3w_2u_1-w_3u_2v_1\end{aligned}$$

On appelle parfois ce produit $(U\times V)\bullet W$ le produit mixte de U et V par W.

Une signification géométrique de ce produit a aussi été dégagée en même temps que sa définition : $|\text{Dét }(U,V,W)|=|(U\times V)\bullet W|$ est le volume du parallélépipède déterminé par U, V et W.

La seule définition du déterminant entraîne encore une fois quelques propriétés remarquables, et qui résultent de calculs élémentaires.

D'abord, le déterminant est trilinéaire, ou *multilinéaire*, c'est-à-dire que, quels que soient les nombres réels a, b et c :

$$\begin{aligned}\text{Dét }(U,V,a\cdot X+b\cdot Y) &= a\cdot\text{Dét }(U,V,X)+b\cdot\text{Dét }(U,V,Y)\\ \text{Dét }(U,a\cdot X+b\cdot Y,W) &= a\cdot\text{Dét }(U,X,W)+b\cdot\text{Dét }(U,Y,W)\\ \text{Dét }(a\cdot X+b\cdot Y,V,W) &= a\cdot\text{Dét }(X,V,W)+b\cdot\text{Dét }(Y,V,W)\end{aligned}$$

Ensuite, le déterminant est *antisymétrique*, au sens où

$$\begin{aligned}\text{Dét }(U,V,W) &= -\text{Dét }(U,W,V)=-\text{Dét }(V,U,W)\\ &= \text{Dét }(V,W,U)=\text{Dét }(W,U,V)=-\text{Dét }(W,V,U)\end{aligned}$$

ce qui implique que, dès que deux parmi les trois éléments U, V et W sont égaux, on a $\text{Dét }(U,V,W)=0$.

Plus généralement, l'interprétation en termes de volume entraîne aisément

$$\text{Dét }(U,V,W)=0\Leftrightarrow\ O,\ U\ ,\ V\text{ et }W\text{ sont coplanaires}$$

Orientation de l'espace

Les propriétés d'antisymétrie du déterminant permettent de définir une notion d'*orientation relative* de l'espace, sur le modèle de celle d'orientation *relative* dans un plan.

Si (U,V,W) et (X,Y,Z) sont deux bases de l'espace pointé en O, elles définissent la même orientation de l'espace si $\frac{\text{Dét }_{(U,V,W)}}{\text{Dét }_{(X,Y,Z)}}$ est positif et elles définissent deux orientations opposées si $\frac{\text{Dét }_{(U,V,W)}}{\text{Dét }_{(X,Y,Z)}}$ est négatif.

Encore une fois, il est impossible que Dét (U,V,W) ou Dét (X,Y,Z) soient nuls, puisqu'alors O, U, V et W ou O, X, Y et Z seraient coplanaires, et donc (U,V,W) ou (X,Y,Z) ne serait pas une base.

Il s'ensuit, par exemple, que si les points O, U et V ne sont pas alignés, alors la base $(U,V,U\times V)$ est de même orientation que la base canonique (I,J,K) où $I=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, et $K=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, puisque Dét $(I,J,K)=1$ et

$$\text{Dét }(U,V,U\times V)=(U\times V)\bullet(U\times V)=\|U\times V\|^2\geqslant 0$$

Volume orienté dans un espace orienté

Si l'espace pointé en O est orienté par le choix d'une base (U,V,W), et si X , Y et Z sont trois points, on appelle volume orienté déterminé par X , Y et Z, et on note $V(X,Y,Z)$, le *nombre réel* défini par

$$\text{Dét }(X,Y,Z)=V(X,Y,Z)\cdot\text{Dét }(U,V,W)$$

Dans le cas particulier où $(U,V,W)=(I,J,K)$ est la base canonique décrite plus haut, le volume orienté s'identifie au déterminant.

Remarque 2.5.1 *Un exposé au Séminaire de Didactique des Mathématiques du C.D.S. à Mons, le 25 mars 1997, intitulé « Bivecteur, produit vectoriel, volume, déterminant ... », a été consacré à une présentation des mêmes thèmes que ceux abordés dans cette fiche, mais à partir de la notion de produit extérieur [44].*

2.6. Les rotations de l'espace

2.6.1 Introduction

Cette section est consacré à la description des rotations de l'espace qui laissent globalement invariant un cube donné et à la représentation matricielle des rotations.

Cela nécessite quelques préliminaires, rassemblés ci-dessous.

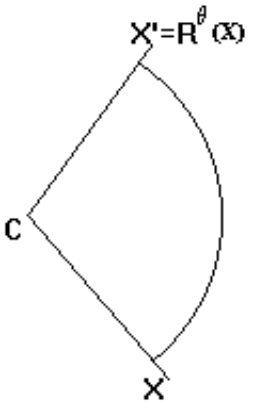
Il est fait un usage fréquent dans tout ce thème des résultats obtenus dans la fiche 15.

Les rotations planes

DÉFINITION 2.6.1 *Dans un plan orienté pointé en C, on appelle rotation d'angle orienté θ et de centre C la transformation de ce plan, notée R^θ, définie de la manière suivante : si X est un point quelconque de ce plan,*

$$R^\theta(X) = X' \Leftrightarrow \begin{cases} \|X\| = \|R^\theta(X)\| = \|X'\| \\ \widehat{XCX'} = \theta \end{cases}$$

et on pose $R^\theta(C) = C$.



Une rotation plane conserve le produit scalaire

Une rotation plane étant définie à partir d'une égalité de longueurs et d'une mesure d'angle, il est naturel de considérer son effet sur le produit scalaire de deux vecteurs.

La propriété fondamentale des rotations planes est qu'elles laissent invariant le produit scalaire. Plus précisément, si R^θ est une rotation d'angle orienté θ et de centre C, alors quels que soient les points X et Y :

$$X \bullet Y = R^\theta(X) \bullet R^\theta(Y)$$

En effet, si on note $R^\theta(X) = X'$ et $R^\theta(Y) = Y'$ alors,

$$\begin{aligned} R^\theta(X) \bullet R^\theta(Y) &= \|R^\theta(X)\| \cdot \|R^\theta(Y)\| \cdot \cos \widehat{X'CY'} \\ &= \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos(\widehat{X'CX} + \widehat{XCY} + \widehat{YCY'}) \\ &= \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos(-\theta + \widehat{XCY} + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos(\widehat{XCY}) \\ &= X \bullet Y \end{aligned}$$

Les rotations de l'espace

Définitions

Dans l'espace pointé en un point O, on appelle *axe* toute droite passant par O munie d'un repère, c'est-à-dire d'un point P d'abscisse 1. Comme détaillé dans les compléments de la fiche 15, un axe induit une *orientation* sur tout plan qui lui est perpendiculaire.

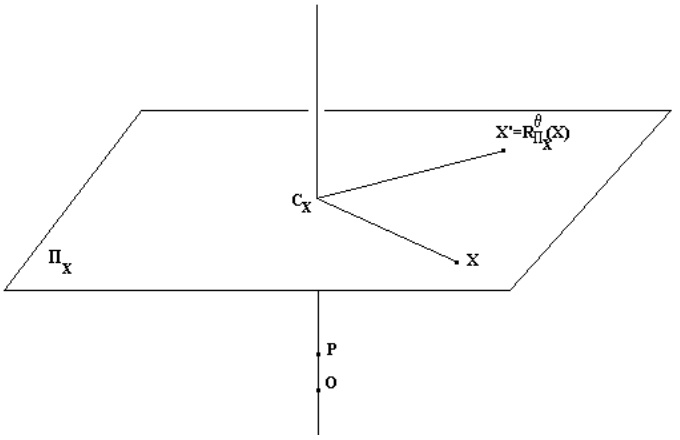
Dans l'espace pointé en un point O, on appelle *rotation d'angle orienté θ et d'axe OP* la transformation de l'espace, notée R_P^θ, définie de la manière suivante : si X est un point quelconque, on note

- Π_X : le plan perpendiculaire à la droite OP contenant X, *orienté* conformément à l'axe OP,
- C_X : le point de percée de la droite OP dans le plan Π_X,
- $R_{\Pi_X}^\theta$: la rotation *plane* d'angle orienté θ et de centre C_X dans le plan Π_X,

et alors

$$R_P^\theta(X) = X' \Leftrightarrow R_{\Pi_X}^\theta = X'$$

Cette définition implique que, dès que X est un point *sur* la droite OP : $R_P^\theta(X) = X$.



Une rotation de l'espace conserve le produit scalaire

Les rotations de l'espace laissent encore le produit scalaire *invariant*, c'est-à-dire : si R_P^θ est une rotation d'angle orienté θ et d'axe la droite OP, alors quels que soient les points X et Y :

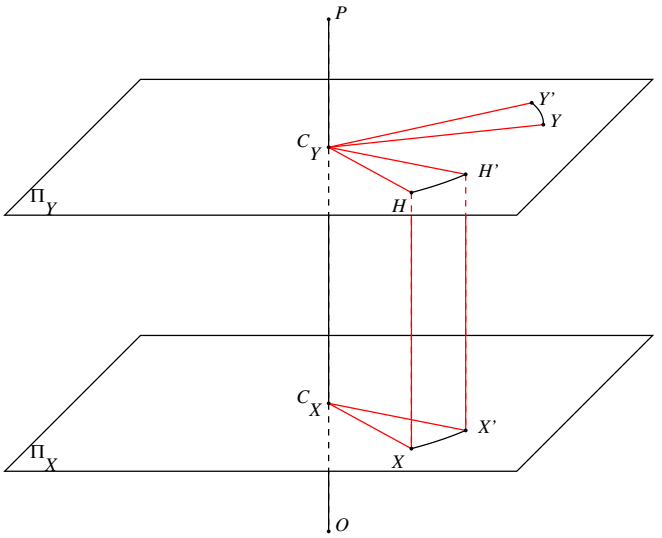
$$X \bullet Y = R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(Y)$$

La démonstration de ce résultat est plus élaborée que dans le cas des rotations planes. Si on note $R_P^\theta(X) = X'$ et $R_P^\theta(Y) = Y'$ alors,

$$\begin{aligned} X' \bullet Y' &= (C_X + (X' - C_X)) \bullet (C_Y + (Y' - C_Y)) \\ &= C_X \bullet C_Y + (X' - C_X) \bullet (Y' - C_Y) \end{aligned}$$

car les droites $X'C_X$ et $Y'C_Y$ sont perpendiculaires à la droite OP. D'autre part, la translation qui amène C_X sur C_Y permet d'écrire (cfr. figure) :

$$X' - C_X = H' - C_Y$$



d'où

$$\begin{aligned} X' \bullet Y' &= C_X \bullet C_Y + (H' - C_Y) \bullet (Y' - C_Y) \\ &= C_X \bullet C_Y + R^{\theta}_{\Pi_Y}(H) \bullet R^{\theta}_{\Pi_Y}(Y) \\ &= C_X \bullet C_Y + (H - C_Y) \bullet (Y - C_Y) \end{aligned}$$

grâce à l'invariance du produit scalaire pour la rotation plane $R^{\theta}_{\Pi_Y}$.

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} X \bullet Y &= (C_X + (X - C_X)) \bullet (C_Y + (Y - C_Y)) \\ &= C_X \bullet C_Y + (X - C_X) \bullet (Y - C_Y) \\ &= C_X \bullet C_Y + (H - C_Y) \bullet (Y - C_Y) \end{aligned}$$

puisque $X - C_X = H - C_Y$, ce qui achève d'établir l'invariance du produit scalaire pour les rotations de l'espace.

Cette invariance traduit (en partie) l'image intuitive d'une rotation de l'espace comme *mouvement rigide* : lors d'un tel mouvement, ni les longueurs, ni les positions relatives des objets ne peuvent changer.

Remarque 2.6.2 *Il faut prendre garde à ce qu'une transformation de l'espace qui laisse invariant le produit scalaire n'est pas nécessairement une rotation. En anglais, le terme « rigid motion » est traditionnellement réservé aux rotations de l'espace.*

2.6.2 Fiche n° 16 : Les rotations cubiques

Problème
Dans un système d'axes orthonormé centré en un point O, on considère le cube dont les trois points

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des centres de faces.
a. Décrire *toutes* les rotations de l'espace qui laissent ce cube (globalement) invariant ; on qualifiera désormais une telle rotation de « cubique ». Expliciter l'image d'un point quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ par une telle rotation.
b. Comment ces rotations se composent-elles ? Expliciter l'image d'un point quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ par une telle composition.
c. Comment ces propriétés de composition permettent-elles d'exprimer l éensemble de toutes les rotations cubiques à partir d'un sous-ensemble (le plus petit possible) de telles rotations ? Expliciter les éléments d'un tel sous-ensemble.

2.6.2.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Considérons la rotation $R_I^{\pi/2}$, d'angle orienté égal à $\frac{\pi}{2}$ radians et dont l'axe est la droite OI , munie du repère où le point I est d'abscisse 1.

Le cube étant entièrement déterminé par la donnée des points I, J et K, on va d'abord déterminer l'effet de la rotation sur eux.

On a évidemment

$$R_I^{\pi/2}(I) = I$$

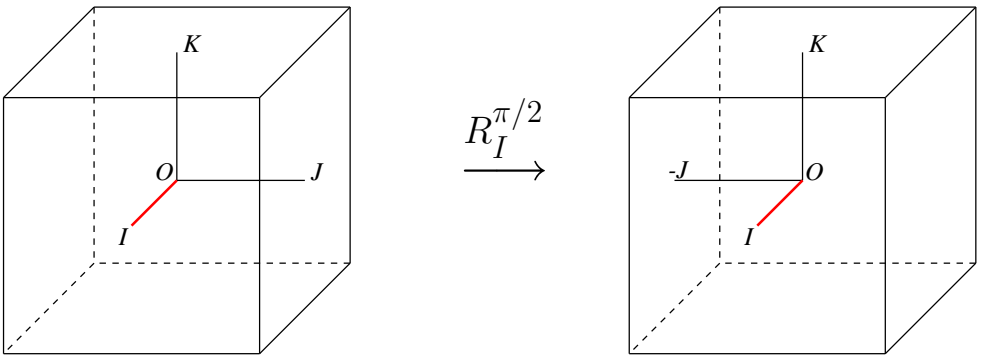
Ensuite

$$R_I^{\pi/2}(J) = K \text{ et } R_I^{\pi/2}(K) = -J$$

On observe aussi facilement l'effet de la rotation $R_I^{\pi/2}$ sur les sommets du cube. Par exemple, le sommet $I+J+K$ a comme image

$$R_I^{\pi/2}(I+J+K) = I-J+K$$

On réalise sans trop de peine en poursuivant ce genre d'observations que la rotation considérée laisse le cube globalement invariant.



Mais il y a mieux ! Si on remarque dans le dernier résultat que

$$I-J+K = R_I^{\pi/2}(I) + R_I^{\pi/2}(J) + R_I^{\pi/2}(K)$$

on en déduit la formule

$$R_I^{\pi/2}(I+J+K) = R_I^{\pi/2}(I) + R_I^{\pi/2}(J) + R_I^{\pi/2}(K)$$

D'autre part, on a aussi

$$R_I^{\pi/2}(-J) = -K \text{ et } R_I^{\pi/2}(-K) = J$$

d'où on déduit encore les formules

$$R_I^{\pi/2}(-J) = -R_I^{\pi/2}(J) \text{ et } R_I^{\pi/2}(-K) = -R_I^{\pi/2}(K)$$

Ces observations, et toutes celles qu'on peut faire pareillement sur d'autres points remarquables du cube, suggèrent deux hypothèses concernant la rotation $R_I^{\pi/2}$.

Première hypothèse : La rotation $R_I^{\pi/2}$ est entièrement déterminée par son effet sur les seuls points I, J et K.

Seconde hypothèse — qui tient compte de la première — :

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K$, alors

$$R_I^{\pi/2}(X) = x_1 \cdot R_I^{\pi/2}(I) + x_2 \cdot R_I^{\pi/2}(J) + x_3 \cdot R_I^{\pi/2}(K)$$

La démonstration de cette formule peut être considérée comme un exercice de lecture !

En effet, la rotation $R_I^{\pi/2}$ préserve le produit scalaire. La base orthonormée (I, J, K) de l'espace pointé en O est donc transformée en une nouvelle *base*

$$(R_I^{\pi/2}(I), R_I^{\pi/2}(J), R_I^{\pi/2}(K)) = (I, K, -J)$$

encore orthonormée. Et la conservation du produit scalaire signifie que $R_I^{\pi/2}(X)$ doit s'exprimer en fonction de $(R_I^{\pi/2}(I), R_I^{\pi/2}(J), R_I^{\pi/2}(K))$ exactement de la même manière que X s'exprime en fonction de (I, J, K).

Autrement dit, comme $X = x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K$ *équivaut* à

$$\begin{cases} x_1 = X \bullet I \\ x_2 = X \bullet J \\ x_3 = X \bullet K \end{cases}$$

et qu'on a, par invariance du produit scalaire par rotation

$$\begin{cases} X \bullet I = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(I) \\ X \bullet J = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(J) \\ X \bullet K = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(K) \end{cases}$$

on en déduit qu'on a aussi

$$\begin{cases} x_1 = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(I) \\ x_2 = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(J) \\ x_3 = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(K) \end{cases}$$

d'où résulte la formule annoncée

$$R_I^{\pi/2}(X) = x_1 \cdot R_I^{\pi/2}(I) + x_2 \cdot R_I^{\pi/2}(J) + x_3 \cdot R_I^{\pi/2}(K)$$

Or, ce *raisonnement* est manifestement tout à fait *indépendant* de la rotation particulière $R_I^{\pi/2}$ considérée ! En d'autres mots, on a aussi établi que si P est un point quelconque et R_P^θ la rotation d'angle orienté θ et d'axe OP, alors

$$R_P^\theta(X) = R_P^\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_P^\theta(x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K) = x_1 \cdot R_P^\theta(I) + x_2 \cdot R_P^\theta(J) + x_3 \cdot R_P^\theta(K)$$

Cette propriété de linéarité est *indépendante du choix de la base* (I, J, K). C'est ce qui est démontré dans le prolongement de cette fiche.

La propriété de linéarité permet de calculer l'image d'un point quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ par la rotation $R_I^{\frac{\pi}{2}}$. En effet, on a :

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(I) = I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(J) = K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(K) = -J = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où, par la formule de linéarité :

$$\begin{aligned} R_I^{\frac{\pi}{2}}(X) &= x_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

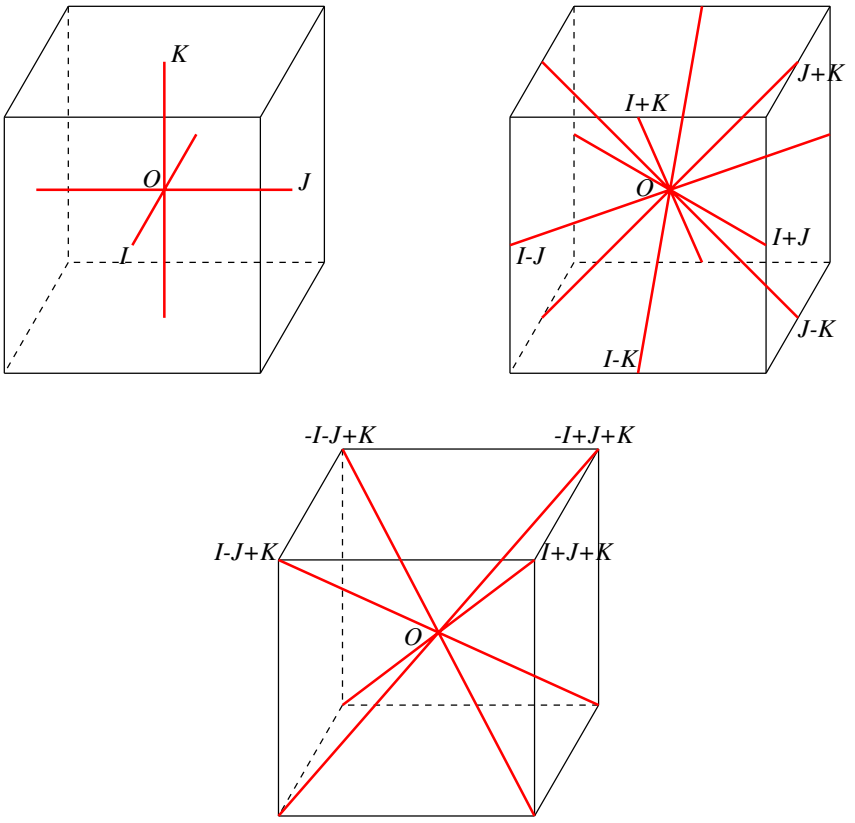
On fait de même pour les autres rotations cubiques.

Mais il reste à établir une *liste* de toutes les rotations de l'espace qui laissent le cube donné globalement invariant. Une telle liste s'obtient à partir des deux observations suivantes.

- Le centre du cube doit être invariant pour *toutes* les rotations : *tous* les axes sont donc des droites passant par l'origine O.
- Si on appelle « élément » de la surface latérale du cube : un sommet, une arête ou une face de ce cube, alors l'intersection d'un axe de symétrie avec un élément de la surface latérale est un *centre de symétrie* de cet élément.

On en déduit la liste de toutes les droites qui peuvent supporter un axe de rotation :

- les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux centres I, J et K de faces du cube ;
- les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points $I+J$, $I-J$, $J+K$, $J-K$, $I+K$, $I-K$ qui sont les milieux des arêtes du cube ;
- les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux sommets $I+J+K$, $-I+J+K$, $-I-J+K$, $I-J+K$; ces droites sont les diagonales du cube.



Il reste à préciser, pour chacune de ces droites : les axes eux-mêmes, leur repère et les angles de rotation possibles pour chacun de ces axes.

On observe d'abord que, sur une droite, le repère opposé à un repère donné ne permet pas de créer des rotations différentes de celles associées à ce repère lui-même, de telle sorte qu'on peut se limiter dans la suite au repère associé au « centre de symétrie » choisi pour déterminer la droite.

Commençons par les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points I, J et K.

Si l'axe est la droite OI munie du repère où le point I est d'abscisse 1, alors les seuls angles de rotation possibles — excepté l'angle nul — sont : $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, et π. Les rotations ainsi décrites sont notées

$$R_I^{\pi/2}, \qquad R_I^{-\pi/2}, \text{ et } R_I^{\pi} = (R_I^{\pi})^{-1}$$

On obtient de manière analogue les rotations

$$R_J^{\pi/2}, \qquad R_J^{-\pi/2}, \text{ et } R_J^{\pi} = (R_J^{\pi})^{-1}$$

et

$$R_K^{\pi/2}, \qquad R_K^{-\pi/2}, \text{ et } R_K^{\pi} = (R_K^{\pi})^{-1}$$

Pour ce type d'axes, on trouve ainsi neuf rotations différentes.

Poursuivons avec les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points $I+J$, $I-J$, $J+K$, $J-K$, $I+K$, $I-K$.

Si l'axe est la droite joignant l'origine des coordonnées au point $I+J$, et munie du repère où le point $I+J$ est d'abscisse 1, alors le seul angle de rotation possible — toujours en dehors de l'angle nul — est π. La rotation ainsi décrite est notée

$$R^{\pi}_{I+J} = (R^{\pi}_{I+J})^{-1}$$

On obtient pareillement

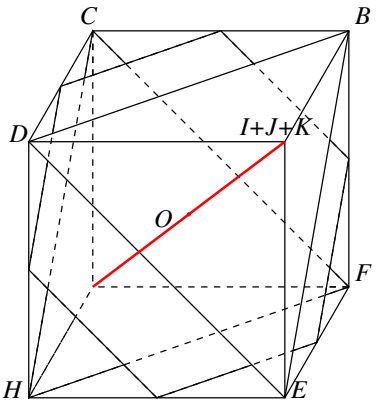
$$R^{\pi}_{I-J} = (R^{\pi}_{I-J})^{-1}$$
$$R^{\pi}_{J+K} = (R^{\pi}_{J+K})^{-1} \text{ et } R^{\pi}_{J-K} = (R^{\pi}_{J-K})^{-1}$$
$$R^{\pi}_{I+K} = (R^{\pi}_{I+K})^{-1} \text{ et } R^{\pi}_{I-K} = (R^{\pi}_{I-K})^{-1}$$

Pour ce type d'axes, on trouve ainsi six rotations différentes.

Il reste à considérer les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points $I+J+K$, $-I+J+K$, $-I-J+K$ et $I-J+K$.

Si l'axe est la droite joignant l'origine des coordonnées au point $I+J+K$, et munie du repère où ce point est d'abscisse 1, alors les seuls angles de rotation possibles sont — toujours en dehors de l'angle nul — : $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

On s'en convainc sans trop de peine en construisant le plan perpendiculaire à l'axe considéré et passant par l'origine : il découpe sur la surface latérale du cube un hexagone régulier. Les triangles EBD et CHF sont situés dans des plans parallèles à celui de cet hexagone.



Les deux rotations ainsi décrites sont notées

$$R^{2\pi/3}_{I+J+K} \text{ et } R^{-2\pi/3}_{I+J+K} = (R^{2\pi/3}_{I+J+K})^{-1}$$

On obtient de la même manière les rotations

$$R^{2\pi/3}_{-I+J+K} \text{ et } R^{-2\pi/3}_{-I+J+K} = (R^{2\pi/3}_{-I+J+K})^{-1}$$

$$R^{2\pi/3}_{-I-J+K} \text{ et } R^{-2\pi/3}_{-I-J+K} = (R^{2\pi/3}_{-I-J+K})^{-1}$$
$$R^{2\pi/3}_{I-J+K} \text{ et } R^{-2\pi/3}_{I-J+K} = (R^{2\pi/3}_{I-J+K})^{-1}$$

Pour ce (dernier) type d'axes on trouve ainsi huit rotations différentes.

Au total, et si on n'oublie pas l'identité, qui est une rotation comme les autres (et qui est, elle, d'angle nul et d'axe quelconque), on a obtenu ainsi $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ rotations.

Elles laissent le cube globalement invariant, et il n'y en a pas d'autres qui fassent de même !

Avertissement

Lorsqu'on étudie l'effet d'une rotation donnée sur le cube, il faut évidemment « garder en mémoire » une trace de la position antérieure du cube.

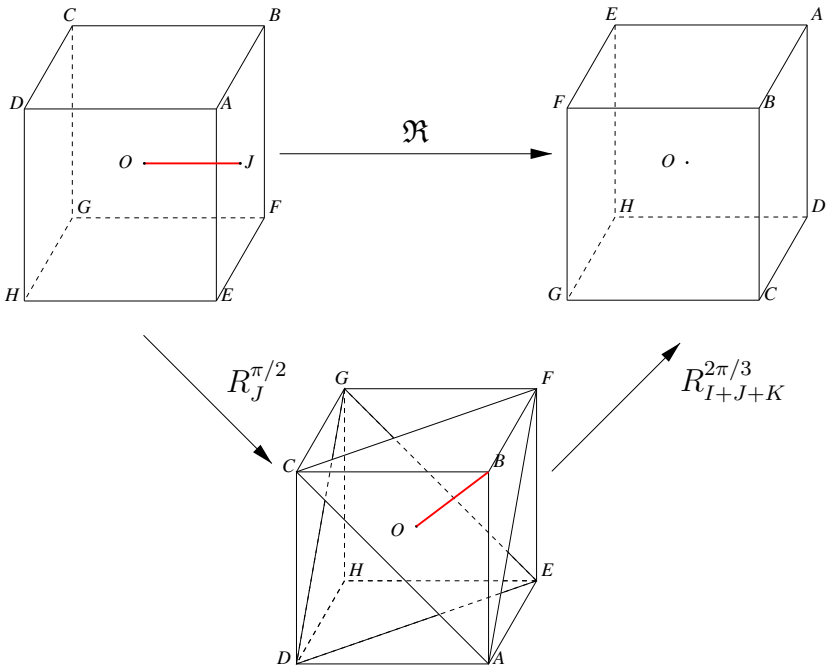
A cet effet, on convient de NE PAS faire tourner le REPÈRE formé par les trois points I, J et K. En accord avec cette convention, les lettres I, J et K sont exclusivement réservées dans la suite aux points qui déterminent ce repère. Ces points et leurs combinaisons linéaires, EN TANT QU'ILS DÉTERMINENT CE REPÈRE OU SONT LIÉS À CELUI-CI, ne sont donc PAS affectés par les rotations et restent TOUJOURS fixes.

Mais considérés en tant que points liés au cube, ils subissent alors l'effet de la rotation. Le bon sens, et le contexte des questions, devraient permettre de ne pas être égaré par ces abus de langage.

Réponse à la question b

Tant qu'on se limite aux rotations cubiques, il n'y a pas de grandes difficultés à vérifier que la composée de deux telles rotations est *encore* une rotation cubique.

Vérifions-le en étudiant la transformation composée $R^{2\pi/3}_{I+J+K} \circ R^{\pi/2}_{J}$ qui sera provisoirement notée $\mathfrak{R}$.



Dans la position où se trouve le cube après que la transformation lui ait été appliquée, les points milieux des segments $[AB]$ et $[HG]$ n'ont pas bougé : la transformation admet donc un axe, à savoir la droite obtenue en joignant l'origine des coordonnées au point $J + K$.

On identifie alors facilement $\mathfrak{R} = R^{2\pi/3}_{I+J+K} \circ R^{\pi/2}_{J}$ à R^{π}_{J+K}.

Comme la composée de deux rotations cubiques est encore une rotation cubique, la formule de linéarité permet de calculer comme dans la réponse à la question *a* l'image d'un point quelconque par la composée de deux rotations cubiques.

Réponse à la question c

La solution de cette dernière partie du problème est affaire de patience et de méthode.

Dans la liste connue des 24 rotations cubiques (décrites à la fin de la solution commentée à la question a), on supprime chaque rotation qui apparaît comme composée d'au moins deux autres rotations présentes dans cette liste.

Aprss avoir exhibé assez de relations de ce genre, on arrive à la conclusion qu'il y a moyen de décrire toutes les rotations cubiques à partir de la composition de *seulement deux* d'entre elles.

On peut même se permettre d'oublier la signification géométrique de ces deux rotations génératrices, pourvu qu'on tienne compte de certaines relations simples entre ces deux rotations, relations qui traduisent l'essentiel de la géométrie de la situation. Voici, en bref, une présentation d'un tel résultat.

On choisit par exemple les deux rotations $R^{2\pi/3}_{I+J+K}$ et $R^{\pi/2}_{I}$. On a d'abord

$$R^{2\pi/3}_{I+J+K} \circ R^{\pi/2}_{I} = R^{\pi}_{I+J}$$

Notons pour abréger $\beta = R^{2\pi/3}_{I+J+K}$ et $\gamma = R^{\pi/2}_{I}$.

La relation précédente se note $\beta\gamma = R^{\pi}_{I+J}$ pourvu qu'on convienne de juxtaposer — ou multiplier — les lettres β et γ pour symboliser l'opération « $\circ$ » de composition, et qu'on prenne bien garde à l'*ordre* d'écriture, puisque

$$\gamma\beta = R^{\pi/2}_{I} \circ R^{2\pi/3}_{I+J+K} = R^{\pi} I + K \neq R^{\pi}_{I+J} = \beta\gamma$$

Si on convient encore de noter « 1 » pour l'identité, on fait apparaître des relations dont le contenu géométrique est clair :

$$\begin{cases} \beta^3 = 1 \\ \gamma^4 = 1 \\ (\beta\gamma)^2 = 1 \end{cases}$$

Ces *deux* rotations génératrices, à savoir β et γ, et les *trois* relations précédentes permettent de retrouver les 24 rotations cubiques. Plus précisément, on déduit de ces trois relations les relations « dérivées » :

$$\begin{cases} \beta^{-1} = \beta^2 \\ \gamma^{-1} = \gamma^3 \end{cases}$$

d'où aussi

$$\begin{cases} \gamma\beta\gamma = \beta^{-1} = \beta^2 \\ \beta\gamma\beta = \gamma^{-1} = \gamma^3 \end{cases}$$

Il s'agit alors de dresser une liste de représentants de tous les mots formés avec les deux seules lettres β et γ, et en tenant compte autant de l'ordre d'écriture que des trois relations précédentes et de toutes celles qu'on peut en déduire.

Ainsi par exemple, le mot $\gamma^3\beta^2\gamma$ peut être simplifié :

$$\gamma^3\beta^2\gamma = (\beta\gamma\beta)\beta^2\gamma = \beta\gamma^2$$

et le mot $\gamma\beta^2\gamma^2\beta$ peut être rendu équivalent à beaucoup d'autres, entre autres à $\beta\gamma^2\beta^2\gamma$:

$\gamma\beta^2\gamma^2\beta = \gamma(\gamma\beta\gamma)\gamma^2\beta = \gamma^2\beta\gamma^3\beta = \gamma^2\beta(\beta\gamma\beta)\beta = \gamma^2\beta^2\gamma\beta^2 = \gamma^2(\gamma\beta\gamma)\gamma\beta^2 = \gamma^3\beta\gamma^2\beta^2 = (\beta\gamma\beta)\beta\gamma^2\beta^2 = \beta\gamma\beta^2\gamma^2\beta^2 = \beta\gamma(\gamma\beta\gamma)\gamma^2\beta^2 = \beta\gamma^2\beta^2\gamma^3\beta^2 = \beta\gamma^2\beta(\beta\gamma\beta)\beta^2 = \beta\gamma^2\beta^2\gamma$

Avec — comme annoncé — un peu de patience et de méthode, on obtient un ensemble de représentants de tous les mots possibles, classés d'après le degré croissant des mots :

			1			
		β		γ		
	β^2	$\beta\gamma$		$\gamma\beta$	γ^2	
	$\beta^2\gamma$		$\beta\gamma^2$	$\gamma^2\beta$	$\gamma\beta^2\gamma^3$	
$\gamma\beta^2\gamma$	$\beta^2\gamma^2$	$\beta\gamma^2\beta$		$\gamma^2\beta^2$	$\beta\gamma^3$	$\gamma^3\beta$
	$\gamma^2\beta^2\gamma$	$\gamma\beta^2\gamma^2$	$\beta^2\gamma^2\beta$	$\beta\gamma^2\beta^2$	$\beta\gamma^3\beta$	
			$\beta\gamma^2\beta^2\gamma$			

On compte ainsi 24 mots différents, et on vérifie que chacun d'entre eux correspond à exactement une rotation cubique. C'est la *concision* du procédé de description qui fait l'intérêt du résultat. On peut le résumer de la manière suivante : le groupe (fini, et non commutatif) des rotations cubiques, noté Γ , est le groupe à deux générateurs β et γ soumis aux trois relations

$$\begin{cases} \beta^3 = 1 \\ \gamma^4 = 1 \\ (\beta\gamma)^2 = 1 \end{cases}$$

En notations condensées :

$$\Gamma = \langle \{\beta, \gamma : \beta^3 = \gamma^4 = (\beta\gamma)^2 = 1\} \rangle$$

On trouvera dans les compléments qui suivent une démonstration complète de ce que l'ensemble des rotations de l'espace forme aussi un groupe pour la composition des rotations, dont Γ est donc un sous-groupe fini. Il en résultera que l'ensemble correspondant des matrices 3×3, dont on donnera à cette occasion une caractérisation purement matricielle, forme un groupe pour la multiplication des matrices.

2.6.2.2 Commentaires et prolongements

Comme annoncé dans la réponse à la question a, démontrons que toute rotation R_P^θ est une application linéaire, c'est-à-dire que quels que soient les points X et Y et le nombre réel a :

$$\begin{aligned} R_P^\theta(X+Y) &= R_P^\theta(X) + R_P^\theta(Y) \\ R_P^\theta(a \cdot X) &= a \cdot R_P^\theta(Y) \end{aligned}$$

On considère une base orthogonale (U, V, W) de l'espace pointé en O. Comme la rotation R_P^θ conserve le produit scalaire, le triplet $(R_P^\theta(U), R_P^\theta(V), R_P^\theta(W))$ est encore une base orthogonale de l'espace.

On calcule alors, grâce à la bilinéarité du produit scalaire, et à son invariance sous la rotation R_P^θ :

$$\begin{aligned} &\big(R_P^\theta(X+Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)\big) \bullet R_P^\theta(U) \\ &= ((R_P^\theta(X+Y) \bullet R_P^\theta(U)) - (R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(U)) - (R_P^\theta(Y) \bullet R_P^\theta(U)) \\ &= ((X+Y) \bullet U) - (X \bullet U) - (Y \bullet U) = 0 \end{aligned}$$

Pareillement

$$\begin{aligned} &\big(R_P^\theta(X+Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)\big) \bullet R_P^\theta(V) \\ &= ((R_P^\theta(X+Y) \bullet R_P^\theta(V)) - (R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(V)) - (R_P^\theta(Y) \bullet R_P^\theta(V)) \\ &= ((X+Y) \bullet V) - (X \bullet V) - (Y \bullet V) = 0 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} &\big(R_P^\theta(X+Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)\big) \bullet R_P^\theta(W) \\ &= ((R_P^\theta(X+Y) \bullet R_P^\theta(W)) - (R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(W)) - (R_P^\theta(Y) \bullet R_P^\theta(W)) \\ &= ((X+Y) \bullet W) - (X \bullet W) - (Y \bullet W) = 0 \end{aligned}$$

L'élément $R_P^\theta(X+Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)$ étant ainsi orthogonal aux *trois* éléments d'une *base* de l'espace doit être identiquement nul, d'où

$$R_P^\theta(X+Y) = R_P^\theta(X) + R_P^\theta(Y)$$

On procède de même pour établir

$$R_P^\theta(a \cdot X) = a \cdot R_P^\theta(X)$$

ce qui achève de démontrer que toute rotation de l'espace est une application linéaire.

Dans l'espace, toute *application linéaire* qui laisse invariant le produit scalaire, c'est-à-dire les longueurs et la valeur absolue des angles orientés, est appelée une isométrie de l'espace.

La signification géométrique de la propriété de linéarité est élémentaire, mais fondamentale. En vertu de ce que l'on sait de l'équation vectorielle ou des équations paramétriques d'une droite ou d'un plan, cette linéarité signifie que toute rotation de l'espace transforme une droite en une droite, et un plan en un plan.

2.6.3 Fiche n° 17 : La représentation matricielle des rotations

2.6.3.1 Liminaire

La fiche suivante peut être conçue comme un prolongement de la fiche N ° 16 consacrée aux rotations cubiques. Elle développe la représentation matricielle des rotations *quelconques* de l'espace sans épuiser le sujet. En particulier, on n'y étudie pas la caractérisation algébrique des rotations de l'espace.

S'il a semblé plus approprié de ne pas aborder ce sujet en même temps que l'étude des rotations cubiques, c'est parce que la représentation matricielle des *seules* rotations cubiques n'offre pas grand intérêt.

Mais d'autre part, l'interprétation matricielle des transformations linéaires, lorsqu'elle est introduite à partir des matrices de rotation, met en évidence *le rôle du produit scalaire dans le produit matriciel*. C'est ce qui est détaillé dans la fiche qui suit. Du produit scalaire à la forme linéaire associée, il n'y a qu'un pas, et on sait que pour les transformations linéaires *quelconques*, c'est par le biais des formes linéaires (c'est-à-dire de la dualité des espaces vectoriels) que l'on arrive à comprendre la raison d'être géométrique des règles du calcul matriciel. Mais c'est là une autre histoire ...

Au vu de son objectif, cette dernière fiche n'a pas le même ton que les précédentes. Elle est plus proche d'un exposé que d'une situation-problème. On peut éventuellement la proposer aux élèves comme exercice de lecture et de compréhension d'un texte mathématique.

2.6.3.2 Situation générale

On note :

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la *base canonique* de $\mathbb{R}^3$.

On considère une rotation quelconque R_P^θ d'axe OP et d'angle orienté θ. On se propose d'étudier l'image d'un point $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1.I + x_2.J + x_3.K$ quelconque par cette rotation.

2.6.3.3 Notion de matrice

En vertu de la formule de linéarité (voir fiche précédente), la rotation R_P^θ étant entièrement déterminée par la donnée de

$$R_P^\theta(I) = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}, \qquad R_P^\theta(J) = \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} \text{ et } R_P^\theta(K) = \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

on la représente par le tableau, appelé « matrice 3×3 »

$$M_P^\theta = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

dont les *colonnes* sont les coordonnées de $R_P^\theta(I)$, $R_P^\theta(J)$ et $R_P^\theta(K)$.

On déduit immédiatement de la linéarité de la rotation R_P^θ :

$$\begin{aligned} R_P^\theta(X) &= R_P^\theta(x_1.I + x_2.J + x_3.K) \\ &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} \\ x_1 \cdot r_{21} + x_2 \cdot r_{22} + x_3 \cdot r_{23} \\ x_1 \cdot r_{31} + x_2 \cdot r_{32} + x_3 \cdot r_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qu'on note matriciellement

$$R_P^\theta(X) = M_P^\theta \cdot X = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} \\ x_1 \cdot r_{21} + x_2 \cdot r_{22} + x_3 \cdot r_{23} \\ x_1 \cdot r_{31} + x_2 \cdot r_{32} + x_3 \cdot r_{33} \end{pmatrix}$$

et qui décrit explicitement l'effet de la rotation R_P^θ sur un point $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.6.3.4 L'action d'une matrice sur un vecteur colonne

La *forme* particulière de la colonne qui donne cette expression explicite de $R_P^\theta(X)$ mérite que l'on s'y attarde un peu : il semble en effet difficile de ne pas reconnaître un produit scalaire dans chacune des coordonnées de $R_P^\theta(X)$. Plus précisément,

$$x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} \text{ ou, matriciellement } (r_{11}\ r_{12}\ r_{13}) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot r_{21} + x_2 \cdot r_{22} + x_3 \cdot r_{23} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \text{ ou, matriciellement } (r_{21}\ r_{22}\ r_{23}) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot r_{31} + x_2 \cdot r_{32} + x_3 \cdot r_{33} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} \text{ ou, matriciellement } (r_{31}\ r_{32}\ r_{33}) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il reste à donner une *interprétation géométrique* aux trois « nouveaux » points, de coordonnées

$$\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire aux lignes de la matrice M_P^θ :

$$(r_{11}\ r_{12}\ r_{13}), \quad (r_{21}\ r_{22}\ r_{23}) \text{ et } (r_{31}\ r_{32}\ r_{33})$$

C'est l'objet du point suivant.

2.6.3.5 Rotations inverses et matrices transposées

La rotation R_P^θ admet une rotation *inverse*, c'est-à-dire une rotation, notée $(R_P^\theta)^{-1}$ dont la composée avec R_P^θ est l'identité : c'est la rotation de même axe, mais d'angle orienté $-\theta$. On notera donc

$$(R_P^\theta)^{-1} = R_P^{-\theta}$$

Mais d'autre part, on a

$$x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} = R_P^\theta(X) \bullet I = R_P^\theta(X) \bullet (R_P^\theta \circ R_P^{-\theta}(I)) = X \bullet R_P^{-\theta}(I)$$

puisque toute rotation de l'espace laisse le produit scalaire invariant. Et donc

$$x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} = X \bullet R_P^{-\theta}(I)$$

Comme cette dernière formule est vraie quel que soit le point X, on en déduit, en posant successivement $X = I$, J ou K, l'interprétation géométrique cherchée du point $\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}$, ou de la ligne $(r_{11}\ r_{12}\ r_{13})$, à savoir :

$$R_P^{-\theta}(I) = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} \text{ ou } (r_{11}\ r_{12}\ r_{13})$$

Pareillement

$$R_P^{-\theta}(J) = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \text{ ou } (r_{21}\ r_{22}\ r_{23})$$

$$R_P^{-\theta}(K) = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} \text{ ou } (r_{31}\ r_{32}\ r_{33})$$

En conclusion, la rotation $(R_P^\theta)^{-1} = R_P^{-\theta}$, inverse de la rotation R_P^θ, est entièrement déterminée par la donnée de sa matrice

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

appelée transposée de la matrice M_P^θ, et notée ${}^tM_P^\theta$, obtenue en permutant les lignes avec les colonnes de la matrice M_P^θ.

2.6.3.6 Remarque importante

On prendra bien garde à ne pas croire que la transposée d'une matrice quelconque en est toujours l'inverse. Comme nous venons de le démontrer, cette propriété est propre aux matrices qui représentent une transformation orthogonale, c'est-à-dire une transformation qui respecte le produit scalaire.

2.6.3.7 Quelques exemples

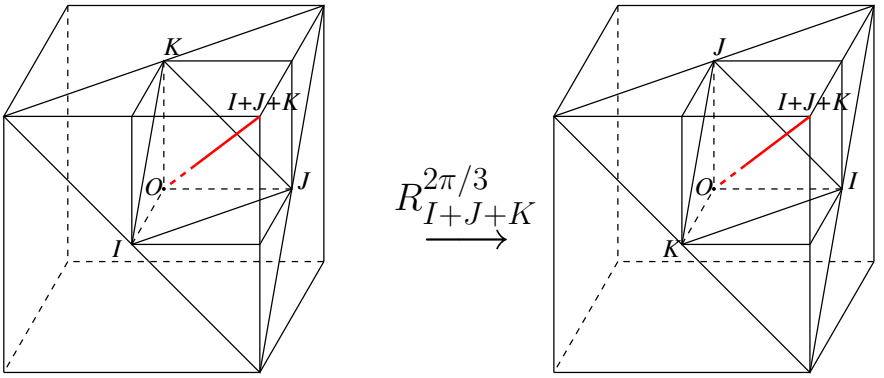
Voici l'expression *matricielle* de quelques rotations cubiques, exprimées dans la base (I, J, K) :

$M_J^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque la rotation $R_J^{\pi/2}$ envoie I sur $-K$, fixe J et envoie K sur I.

$M_{J+K}^{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque la rotation R_{J+K}^{π} envoie I sur -I, et permute K et J ;

$M^{2\pi/3}_{I+J+K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque la rotation $R^{2\pi/3}_{I+J+K}$ envoie I sur J, J sur K et K sur I .

Etc.



2.6.3.8 Composition des rotations et produit matriciel

Considérons deux rotations quelconques R^{θ}_{P} et R^{φ}_{Q} où les points P et Q, et les angles orientés θ et φ, sont arbitraires. On se propose de décrire l'effet de la transformation composée $R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}$ sur un point quelconque.

La linéarité de chacune de ces transformations implique la linéarité de la composée, et permet de calculer

$$\begin{aligned} R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(X) &= R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K) \\ &= R^{\varphi}_{Q}(x_1 \cdot R^{\theta}_{P}(I) + x_2 \cdot R^{\theta}_{P}(J) + x_3 \cdot R^{\theta}_{P}(K)) \\ &= x_1 \cdot (R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(I)) + x_2 \cdot (R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(J)) + x_3 \cdot (R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(K)) \end{aligned}$$

Si, à nouveau, on souhaite effectuer le calcul pratique de l'effet de cette composition sur un point quelconque de l'espace, on commence par associer

$$\text{la matrice } M^{\theta}_{P} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \text{ à la rotation } R^{\theta}_{P},$$

$$\text{la matrice } M^{\varphi}_{Q} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \text{ à la rotation } R^{\varphi}_{Q}.$$

En vertu de la linéarité de la transformation composée $R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}$, la matrice correspondante doit être constituée des colonnes

$$R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(I), \qquad R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(J) \text{ et } R^{\varphi}_{Q} \circ R^{\theta}_{P}(K)$$

Notons-la

$$M_{Q,P}^{\varphi,\theta} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Chacun des termes de cette matrice est encore le résultat d'un calcul de produit scalaire. Par exemple

$$t_{32} = (R_Q^{\varphi} \circ R_P^{\theta}(J)) \bullet K = (R_Q^{\varphi} \circ R_P^{\theta}(J)) \bullet (R_Q^{\varphi} \circ R_Q^{-\varphi}(K)) = R_P^{\theta} \circ R_Q^{-\varphi}(K)$$

puisque toute rotation de l'espace laisse le produit scalaire invariant. Le terme s'obtient donc en faisant le produit scalaire de $(s_{31}\ s_{32}\ s_{33})$ par $\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}$.

De manière explicite

$$M_{Q,P}^{\varphi,\theta} = \begin{pmatrix} s_{11} \cdot r_{11} + s_{12} \cdot r_{21} + s_{13} \cdot r_{31} & s_{11} \cdot r_{12} + s_{12} \cdot r_{22} + s_{13} \cdot r_{32} & s_{11} \cdot r_{13} + s_{12} \cdot r_{23} + s_{13} \cdot r_{33} \\ s_{21} \cdot r_{11} + s_{22} \cdot r_{21} + s_{23} \cdot r_{31} & s_{21} \cdot r_{12} + s_{22} \cdot r_{22} + s_{23} \cdot r_{32} & s_{21} \cdot r_{13} + s_{22} \cdot r_{23} + s_{23} \cdot r_{33} \\ s_{31} \cdot r_{11} + s_{32} \cdot r_{21} + s_{33} \cdot r_{31} & s_{31} \cdot r_{12} + s_{32} \cdot r_{22} + s_{33} \cdot r_{32} & s_{31} \cdot r_{13} + s_{32} \cdot r_{23} + s_{33} \cdot r_{33} \end{pmatrix}$$

Ainsi est défini le produit de $M_Q^{\varphi} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ par $M_P^{\theta} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$,

qu'on note $M_{Q,P}^{\varphi,\theta} = M_Q^{\varphi} \cdot M_P^{\theta}$.

2.6.3.9 La non commutativité du produit matriciel

Ce produit matriciel n'est pas commutatif, de la même manière que la composition des rotations (et plus généralement des transformations linéaires) n'est pas commutative.

On vérifie par exemple que

$$R_J^{\pi/2} \circ R_{I+J+K}^{2\pi/3} = R_{I+J}^{\pi}$$

alors que, comme on l'a vu plus haut

$$R_{I+J+K}^{2\pi/3} \circ R_J^{\pi/2} = R_{J+K}^{\pi}$$

En terme de matrices, on vérifie de même que

$$M_J^{\pi/2} \cdot M_{I+J+K}^{2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{I+J}^{\pi}$$

tandis que

$$M_{I+J+K}^{2\pi/3} \cdot M_J^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{J+K}^{\pi}$$

Deuxième partie

Applications

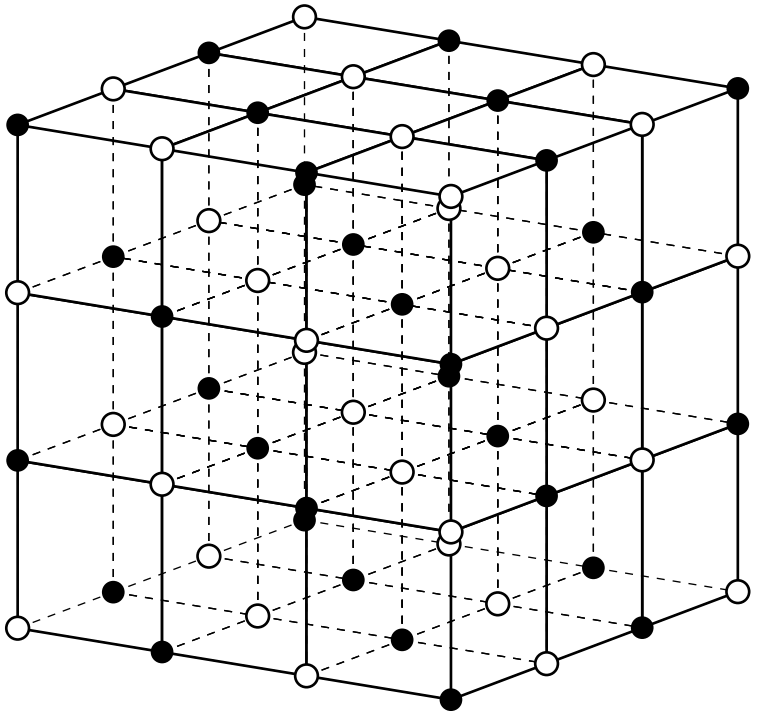
Chapitre 3

Un réseau cubique électrique ?

3.1 Introduction 189
3.2 La géométrie des charges électriques 192
3.3 Le champ créé par les deux premières couches 195
3.4 Le champ créé par la couche n°2 199
3.5 Et le champ correspondant à la couche n°n ? 203
3.6 Pourquoi pas une couche cubique ? 206

3.1. Introduction

L'application qui suit nous a été inspirée par la constatation que certains cristaux, dits ioniques, sont constitués non d'atomes neutres, mais d'ions chargés, certains positivement, d'autres négativement. Par exemple, le sel de cuisine, $NaC\ell$, cristallise dans un réseau cubique, les ions Na^+ et $C\ell^-$ alternant aux sommets de ce réseau. Dans la figure suivante, les boules blanches représentent les ions Na^+ et les boules noires représentent les ions $C\ell^-$.



Dans un premier temps, nous avons essayé de montrer la stabilité du cristal. L'idée est simple : on imagine qu'on écarte un des ions de sa position d'équilibre, et on calcule la résultante des forces coulombiennes exercées alors sur lui par les autres ions. Si cette force résultante tend à le ramener au point de départ, on peut considérer le cristal comme stable.

Nous avons dû constater que nous ne parvenions pas de cette façon à établir la stabilité du sel de cuisine ! En l'occurrence, ce ne sont pas les aspects mathématiques qui sont trop compliqués, mais bien les aspects physico-chimiques. Il semble en effet que la stabilité d'un cristal ionique ne dépende pas seulement des forces coulombiennes, mais également d'autres types de forces d'attraction ou de répulsion.

Il nous a semblé cependant intéressant de proposer la composition de forces électrostatiques coulombiennes comme application du calcul vectoriel, et cela dans une situation qui ne soit pas simpliste. De la considération d'un cristal ionique, nous ne conserverons que l'idée de charges électriques ponctuelles, situées aux sommets d'un réseau cubique, les charges positives alternant avec les charges négatives. La question posée consistera à déterminer le champ électrique créé en un point de l'axe OX par certaines configurations de ces charges, ayant des propriétés remarquables de symétrie. Ceci simplifie considérablement la situation en assurant que le champ résultant soient orienté parallèlement à l'axe OX en point de cet axe.

Les idées à mettre en œuvre ne nécessitent que la connaissance de la somme d'un nombre fini de vecteurs, mais le problème nécessite une bonne maîtrise de la technique, des qualités d'analyse et d'organisation ainsi que du soin et de la persévérance. Les sujets rencontrés sont, outre le calcul vectoriel, des polyèdres réguliers élémentaires dont les propriétés de symétrie sont exploitées et des fonctions algébriques qui sont représentées et dont le comportement peut être étudié sans qu'il soit absolument nécessaire d'en faire une étude systématique précise.

Pour arriver à nos fins, nous n'avons besoin de connaître que la loi de Coulomb :

> *Si deux charges électriques de valeurs respectives q et q' sont situées en des points A et B, la force exercée par la charge q sur la charge q' s'exprime en unités* MKSA *par la formule*
>
> $$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{|AB|^2}\vec{1}_{AB}$$
>
> *où $\vec{1}_{AB}$ est un vecteur de longueur 1 dirigé de A vers B.*

On voit que si les charges q et q' sont de même signe, la force $\vec{F}$ est une force de répulsion, alors que c'est une force d'attraction si q et q' sont de signes opposés. Les charges électriques s'expriment en coulombs, les distances en mètres et les forces en Newtons. ε_0 est une constante dont la valeur nous importe peu, mais qu'il n'y a cependant aucune raison de cacher :

$$\varepsilon_0 = 8,854187182 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

(Pour le lecteur non physicien, l'unité est le Farad par mètre.)

Nous nous placerons dans le cas où les sommets du réseau cubique sont occupés alternativement par des charges électriques de $+1$ Coulomb et de -1 Coulomb, l'origine étant occupée par une charge positive (représentée par une boule blanche sur les différentes figures).

La question posée est

$$\textit{Quel est le champ électrique créé en le point } \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ ?}$$

Rappelons que le champ électrique en un point est la force électrique qui s'exercerait sur une charge unité placée en ce point. Le champ créé en $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par une charge de ± 1 Coulomb en le point $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ du réseau est donc $\pm K \frac{1}{|AP|^2} \vec{1}_{AP} = \pm K \frac{1}{|AP|^3}(P - A)$ où $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, constante que nous éliminerons de nos calculs puisque, multipliant toutes les forces considérées, elle ne modifie pas l'allure des résultats.

3.2. La géométrie des charges électriques

Dire que les charges électriques positives et négatives alternent aux sommets du réseau a pour conséquence qu'en les sommets $\begin{pmatrix}\pm1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\pm1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\\pm1\end{pmatrix}$ se trouvent des charges négatives. Ensuite, en $\begin{pmatrix}\pm2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\pm2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\\pm2\end{pmatrix}$, mais aussi en $\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pm1\\0\\\pm1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\\pm1\\\pm1\end{pmatrix}$, on trouve des charges positives.

Continuant de la sorte, on constate que les charges positives (boules blanches) occupent les sommets du réseau dont la somme des coordonnées est paire, et que les charges négatives (disques noirs) sont aux sommets dont la somme des coordonnées est impaire.

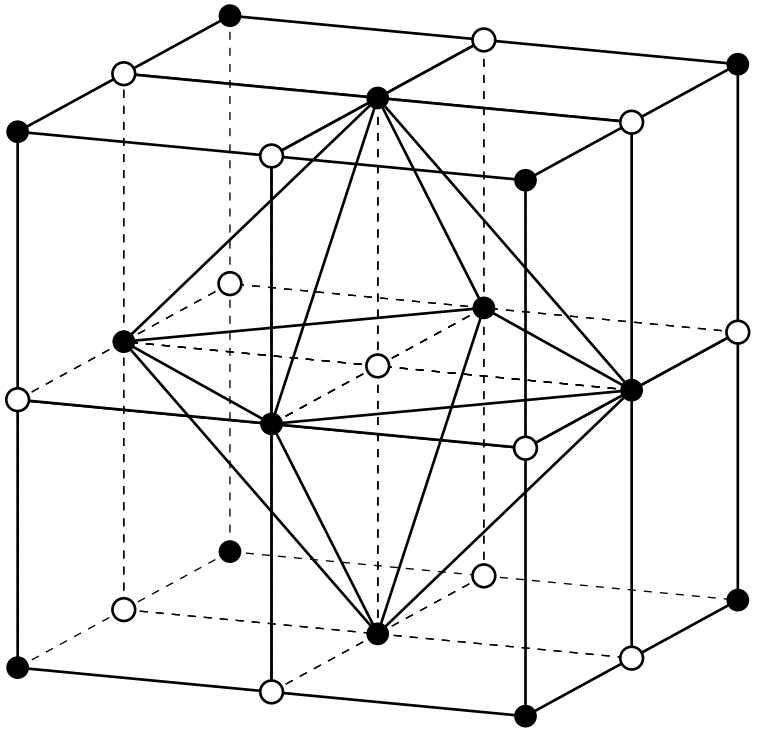
Nous exploiterons cette remarque en répartissant les charges électriques en couches :

- la couche n°0 est formé de l'origine $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,
- la couche n°1 comportera les charges situées aux sommets pour lesquels $|x|+|y|+|z|=1$ ([1]),
- la couche n°2, comportera celles qui sont situées aux sommets pour lesquels $|x|+|y|+|z|=2$,
- etc.

La quantité $|x|+|y|+|z|$ est parfois appelée la *taxi-distance* du point $P=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ au point $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. C'est tout simplement le nombre minimum d'arêtes du réseau à parcourir pour aller de P à l'origine O.

Quel est l'aspect géométrique de chacune des couches ?

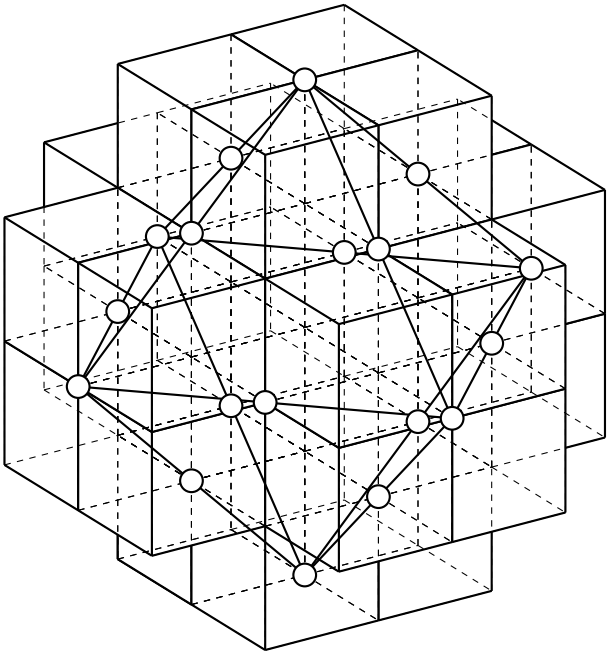
([1]) On note au passage que $x+y+z$ et $|x|+|y|+|z|$ ont toujours la même parité.



Couche n°1

Pour $n > 0$, considérons la couche n°n, nous la noterons C_n. Elle est formée des charges situées aux sommets du réseau pour lesquels $|x| + |y| + |z| = n$. La présence de valeurs absolues dans cette formule nous amène à considérer séparément la portion de C_n située dans chacun des huit octants de l'espace. Le premier octant, par exemple, est formé des points pour lesquels $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$. Dans cet octant, l'équation $|x| + |y| + |z| = n$ se réduit à $x + y + z = n$. C'est l'équation du plan passant par les points $\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$. La portion de C_n contenue dans le premier octant est donc formée des points de coordonnées entières situés à l'intérieur ou au bord du triangle ayant ces points comme sommets.

En procédant de la même façon pour chacun des huit octants, nous constatons que la couche C_n est constituée des points à coordonnées entières situés dans huit triangles équilatéraux et isométriques. C'est un octaèdre régulier ayant pour sommets les six points $\begin{pmatrix} \pm n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm n \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm n \end{pmatrix}$.



Couche n°2

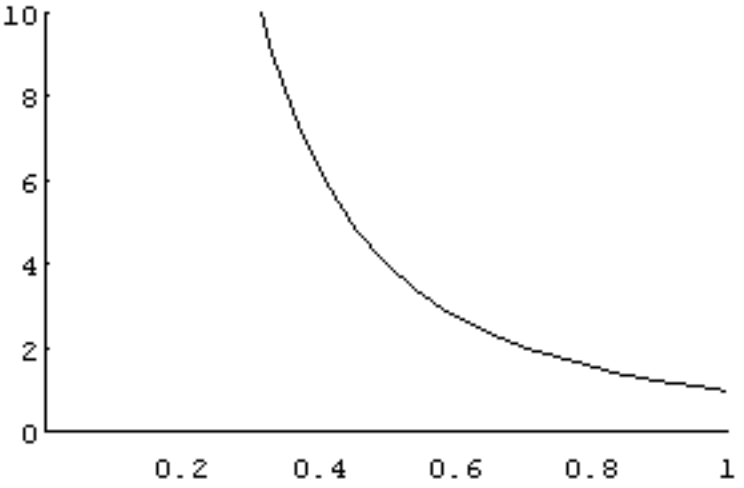
3.3. Le champ créé par les deux premières couches

Intéressons-nous au champ électrique créé en un point $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de l'axe OX par les couches C_0 et C_1. Supposons de plus $0 < x < 1$.

La couche n°0 est constituée d'un seul point : l'origine. Le champ $\vec{F}_0$ en $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donné (au facteur K près) directement par la formule

$$\vec{F}_0(x) = \frac{1}{|0P|^3}(P - O) = \frac{1}{x^3}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voici le graphique de son intensité : $x \mapsto f_0(x) = \frac{1}{x^2}$ pour $0 < x < 1$:



La couche n°1 va être débitée en trois tranches $T_{1,-1}$, $T_{1,0}$ et $T_{1,1}$:

1. $T_{1,-1}$ ne contient que le point $A_{1,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $T_{1,0}$ comprend les quatre points $A_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Enfin la tranche $T_{1,1}$ est réduite au point $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme nous l'avons remarqué, ces points sont les six sommets d'un octaèdre régulier, et en chacun de ces sommets se trouve un charge négative.

Nous devons donc calculer les expressions

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{1,-1} &= \frac{1}{|PA_{1,-1}|^3}(A_{1,-1} - P) \\
\vec{F}_{1,0} &= \frac{1}{|PA_{1,0}|^3}(A_{1,0} - P) + \frac{1}{|PB_{1,0}|^3}(B_{1,0} - P) + \frac{1}{|PC_{1,0}|^3}(C_{1,0} - P) \\
&\quad + \frac{1}{|PD_{1,0}|^3}(D_{1,0} - P) \\
\vec{F}_{1,1} &= \frac{1}{|PA_{1,1}|^3}(A_{1,1} - P)
\end{aligned}$$

Puisque $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $0 < x < 1$, on a

$$|PA_{1,-1}| = 1 + x, \qquad |PA_{1,1}| = 1 - x$$

et

$$|PA_{1,0}| = |PB_{1,0}| = |PC_{1,0}| = |PD_{1,0}| = \sqrt{x^2 + 1}$$

Le champ dû à la couche n°1 est donc, au facteur K près :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \vec{F}_{1,-1} + \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{1,1} \\
&= \frac{1}{(1+x)^3}(A_{1,-1} - P) \\
&\quad + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}(A_{1,0} + B_{1,0} + C_{1,0} + D_{1,0} - 4P) \\
&\quad + \frac{1}{(1-x)^3}(A_{1,1} - P)
\end{aligned}$$

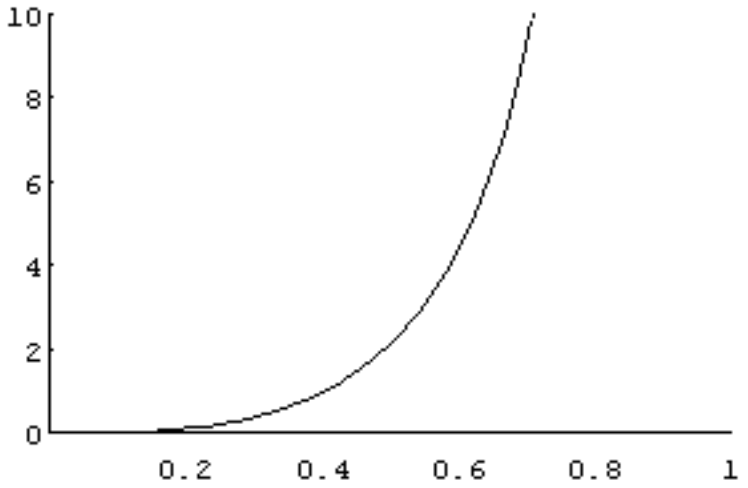
Comme $A_{1,0} + B_{1,0} = O$ et $C_{1,0} + D_{1,0} = O$,

$$\vec{F_1} = \frac{1}{(1-x)^3}\begin{pmatrix} 1-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(1+x)^3}\begin{pmatrix} -1-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme la symétrie de la situation le laissait prévoir, ce champ est dirigée selon l'axe OX. Son intensité vaut

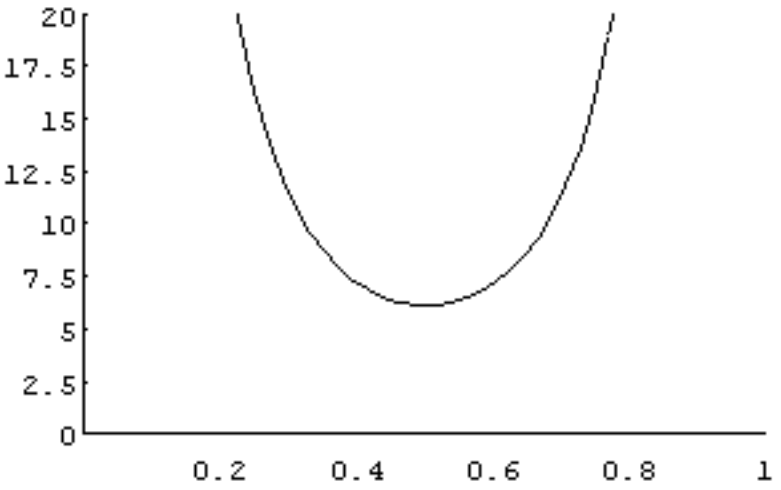
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} - 4x\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= 4x\left(\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Voici le graphe de cette fonction :



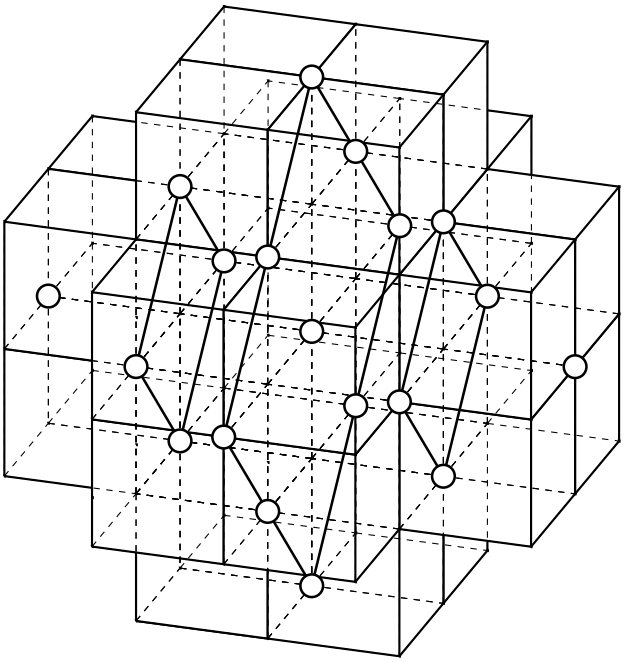
Pour $x = 0$, le champ est nul : les champs créés par les quatre points de la tranche $T_{1,0}$ s'équilibrent alors que les influences des tranches $T_{1,-1}$ et $T_{1,1}$ s'annulent mutuellement. Dès que x augmente, l'intensité devient positive : le champ est dirigé dans la direction des x croissant, l'influence de $T_{1,1}$ domine. Lorsque x tend vers 1, l'intensité du champ tend vers l'infini, ce à quoi on pouvait s'attendre.

Nous pouvons aussi additionner les champs créés par les couches n°0 et 1 :


20
17.5
15
12.5
10
7.5
5
2.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

3.4. Le champ créé par la couche n°2

La couche C_2 est constituée des charges situées aux points du réseau pour lesquels $|x| + |y| + |z| = 2$. Ces points occupent les six sommets et les douze milieux d'arêtes d'un octaèdre. Nous découperons cette couche C_2 en cinq tranches $T_{2,-2}, \ldots, T_{2,2}$. La tranche $T_{2,k}$ est formée des points de C_k d'abscisse k.



Examinons, tranche par tranche, les distances au point $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ des points de la couche C_2. Les 18 distances ne prennent que six valeurs différentes :

Tranche $T_{2,-2}$: Elle n'est constituée que du sommet $A_{2,-2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sa distance à P vaut $2 + x$.

Tranche $T_{2,-1}$ **:** Elle comprend les points $A_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_{2,-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, constituant les sommets d'un carré. Ces quatre points sont à la distance $\sqrt{x^2+2x+2}$ de P.

Tranche $T_{2,0}$ **:** Elle comprend huit points situés aux sommets et aux milieux des côtés d'un carré.

Les quatre sommets sont les points $A_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ Leur distance à P est $\sqrt{x^2+4}$.

Les milieux des côtés du carré sont les points $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Leur distance à P vaut $\sqrt{x^2+2}$.

Tranche $T_{2,1}$ **:** Elle est analogue à la tranche $T_{2,-1}$: quatre points formant un carré. Ces quatre points sont à la distance $\sqrt{x^2-2x+2}$ de P.

Tranche $T_{2,2}$ **:** Elle n'est constituée que du sommet $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sa distance à P vaut $2-x$.

Nous décomposons donc l'expression du champ créé par C_2 en cinq composantes correspondant aux cinq tranches. Les charges situées en les points de C_2 étant positives, les champs correspondant sont des forces de répulsion, donc exprimées par les vecteurs $P - A_{2,-2}$, $P - A_{2,-1}$, ...(alors que dans le cas de la couche n°1, on devait considérer $A_{1,-1} - P$, ...). Ainsi :

$$\vec{F}_{2,-2} = \frac{1}{(2+x)^3}(P - A_{2,-2}) = \frac{1}{(2+x)^3}\begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2+x)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{2,-1} = \frac{1}{(x^2+2x+2)^{3/2}}\left((P - A_{2,-1}) + (P - B_{2,-1}) + (P - C_{2,-1}) + (P - D_{2,-1})\right)$$

$$= 4\frac{1}{(x^2+2x+2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{2,0} &= \frac{1}{(x^2+4)^{3/2}}\left((P-A_{2,0})+(P-B_{2,0})+(P-C_{2,0})+(P-D_{2,0})\right) \\ &\quad +\frac{1}{(x^2+2)^{3/2}}\left(P-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+P-\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+P-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+P-\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{(x^2+4)^{3/2}}+\frac{1}{(x^2+2)^{3/2}}\right)\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

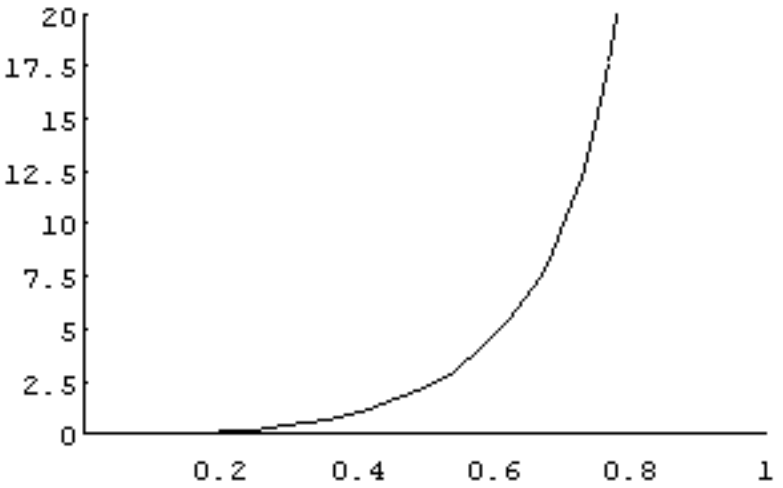
$$\begin{aligned}\vec{F}_{2,1} &= \frac{1}{(x^2-2x+2)^{3/2}}\left((P-A_{2,1})+(P-B_{2,1})+(P-C_{2,1})+(P-D_{2,1})\right) \\ &= 4\frac{1}{(x^2-2x+2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{2,2} = \frac{1}{(2-x)^3}(P-A_{2,2}) = \frac{1}{(2-x)^3}\begin{pmatrix} x-2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2-x)^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate à nouveau que le champ résultant est dirigé suivant l'axe OX. Son intensité est donnée par la fonction

$$\begin{aligned}&f_2(x) \\ &= \frac{1}{(2+x)^2}+\frac{-1}{(2-x)^2} \\ &\quad +\frac{4(x+1)}{(x^2+2x+2)^{3/2}}+\frac{4x}{(x^2+4)^{3/2}}+\frac{4x}{(x^2+2)^{3/2}}+\frac{4(x-1)}{(x^2-2x+2)^{3/2}} \\ &= -\frac{8x}{(4-x^2)^2}+\frac{4x}{(x^2+4)^{3/2}}+\frac{4x}{(x^2+2)^{3/2}}+\frac{4(x-1)}{(x^2-2x+2)^{3/2}}+\frac{4(x+1)}{(x^2+2x+2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Voici le graphe de cette fonction :



Comme f_1, la fonction f_2 est positive, autrement dit les influences des deux premières couches s'additionnent. Cependant, l'intensité de F_2 est nettement plus faible que celle de à F_1.

3.5. Et le champ correspondant à la couche n°n ?

La méthode appliquée précédemment permet de déterminer le champ créé par n'importe laquelle des couches C_n. Les calculs sont simplement plus longs et nécessitent une organisation soigneuse.

Analysons de plus près la couche C_n. Nous déterminerons en particulier le nombre de points du réseau qui en font partie. Nous pouvons écrire

$$C_n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \middle| |x| + |y| + |z| = n \right\}$$

L'abscisse d'un point de C_n est nécessairement comprise entre $-n$ et n. Découpons C_n en tranches de points ayant même abscisse. La tranche $T_{n,k}$, $k = -n, \ldots, 0, \ldots, n$, est définie par :

$$T_{n,k} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \middle| x = k \text{ et } |x| + |y| + |z| = n \right\}$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T_{n,k} \Leftrightarrow x = k, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \text{ et } |y| + |z| = n - |k|$$

Chaque tranche est l'ensemble des points à coordonnées entières situés sur le bord d'un carré (la section de l'octaèdre C_n par le plan $x = k$).

Déterminons le nombre de points de chaque tranche. La tranche $T_{n,-n}$ ne contient que le sommet $A_{n,-n} = \begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, la tranche $T_{n,n}$ ne contient que $A_{n,n} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il est clair que $T_{n,k}$ et $T_{n,-k}$ contiennent le même nombre de points. La tranche $T_{n,-(n-1)}$ est formée des quatre points $\begin{pmatrix} -(n-1) \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(n-1) \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.

D'une façon générale, si $k \neq n$ et $k \neq -n$, la tranche $T_{n,k}$ contient

1. les quatre points $A_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ n-|k| \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ -n+|k| \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ n-|k| \end{pmatrix}$, $D_{n,k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -n+|k| \end{pmatrix}$.
2. les points à coordonnées entières situés sur les côtés du carré de sommets $A_{n,k}$, $B_{n,k}$, $C_{n,k}$, $D_{n,k}$. Par exemple, sur le côté pour lequel $y > 0$ et $z > 0$, on trouve, outre les sommets $A_{n,k}$ et $C_{n,k}$, les $n - |k| - 1$ points

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ n-|k|-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ n-|k|-2 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} k \\ n-|k|-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous voyons que si $k \neq n$ et $k \neq -n$, la tranche $T_{n,k}$ contient $4+4(n-|k|-1) = 4(n-|k|)$ points. Finalement, le nombre S_n de points de la couche C_n est donné par la formule

$$\begin{aligned} S_n &= 1+4+8+\cdots+(4n-4)+4n+(4n-4)+\cdots+8+4+1 \\ &= 2+4n+8\left(1+2+\cdots+(n-1)\right) \\ &= 2+4n+8\frac{n(n-1)}{2} \\ &= 4n^2+2 \end{aligned}$$

Ainsi, $S_1 = 6$, $S_2 = 18$, $S_3 = 38$, ...

Le champ créé par la couche C_n est donc la somme de $4n^2+2$ champs élémentaires. Pour effectuer le calcul, on tient compte de ce que la somme des termes correspondant aux points d'une même tranche est nécessairement, pour des raisons de symétrie, une force parallèle à l'axe OX. A l'exception de ceux qui correspondant aux tranches $T_{n,-n}$ et $T_{n,n}$, les termes se regroupent par paquets de 4.

En tenant compte de ce que les charges situées en les point de C_n sont positives pour n pair et négatives pour n impair, nous obtenons les résultats suivants :

1. Champ engendré par $T_{n,-n}$:

$$\vec{F}_{n,-n} = (-1)^n \frac{1}{(x+n)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Champ engendré par $T_{n,n}$:

$$\vec{F}_{n,n} = (-1)^n \frac{1}{(n-x)^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Champ engendré par $T_{n,k}$ $-(n-1) \leqslant k \leqslant n-1$) :
   Cette tranche a la forme d'un carré. Nous calculerons d'abord l'influence de l'un des côtés de ce carré (en n'y incorporant qu'un seul sommet).
   Considérons donc les points $\begin{pmatrix} k \\ n-|k| \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ n-|k|-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ n-|k|-1 \end{pmatrix}$.
   Leur forme générale est $\begin{pmatrix} k \\ n-|k|-h \\ h \end{pmatrix}$ où h varie de 0 à $n-|k|-1$. La distance de ce point à $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vaut $\sqrt{(x-k)^2+(n-|k|-h)^2+h^2}$ et le champ créé en P est
   $$(-1)^n \frac{1}{((x-k)^2+(n-|k|-h)^2+h^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-k \\ -n+|k|+h \\ h \end{pmatrix}$$
   Lorsqu'on prend en compte les quatre côtés du carré, on note que la situation est invariante par une rotation de 90° autour de l'axe OX. Il en résulte que dans le calcul de $\vec{F}_{n,k}$, les composantes selon OY et OZ s'annulent et que la composante selon OX vaut quatre fois celle qui résulte de la considération d'un seul côté. Ainsi
   $$\vec{F}_{n,k} = 4(-1)^n \sum_{h=0}^{n-|k|-1} \frac{x-k}{((x-k)^2+(n-|k|-h)^2+h^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'intensité de la force $\vec{F}_n$ est ainsi donnée par la fonction

$$\begin{aligned} & f_n(x) \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{(x+n)^2} - \frac{1}{(x-n)^2} + 4 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-|k|-1} \frac{x-k}{((x-k)^2+(n-|k|-h)^2+h^2)^{3/2}} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{-4nx}{(x^2-n^2)^2} + 4 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-|k|-1} \frac{x-k}{((x-k)^2+(n-|k|-h)^2+h^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Pour des valeurs particulières de n, on peut à l'aide d'un bon logiciel de représentation graphique, dessiner cette fonction sans difficulté.

3.6. Pourquoi pas une couche cubique ?

Dans ce qui précède, nous avons choisi d'examiner les champs créés par des parties du réseau ayant la forme d'un octaèdre. L'avantage était que tous les points du même couche étaient munis de charges de même signe. De plus, chaque couche était constituée des points situés à une taxi-distance déterminée de l'origine. Rien ne nous empêche de considérer d'autres configurations. En regroupant les points du réseau par exemple,

- selon leur distance euclidienne à l'origine. Les couches sont alors sphériques.
- selon la valeur de leur plus grande coordonnée (en valeur absolue). On obtient des couches cubiques.
- selon des plans passant par l'origine.
- ...

Les configurations intéressantes sont nombreuses. On peut aussi examiner le champ créé en un point situé ailleurs que sur un axe. Les calculs seront plus complexes. Mais dans tous les cas, les idées à appliquer ne seront guère différentes de celles que nous venons de rencontrer.

Chapitre 4

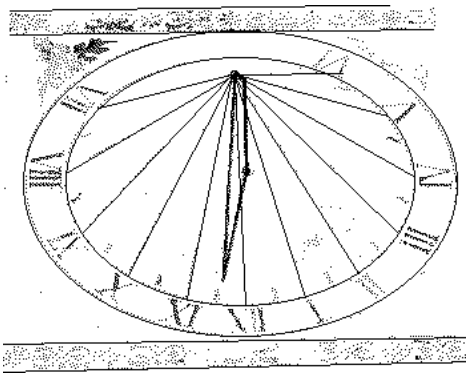
Construire un cadran solaire

4.1 Introduction 208
4.2 Où est le soleil ? 211
4.3 Les cadrans solaires classiques 212
4.4 Où est l'ombre ? 213
4.4.1 Les cadrans équatoriaux 214
4.4.2 Les cadrans horizontaux 215

4.1. Introduction

Des cadrans solaires ont été construits depuis la plus haute antiquité. Le plus ancien cadran connu serait égyptien et daterait du premier millénaire et demi avant notre ère, cependant que « les chinois prétendent qu'ils employaient déjà des cadrans à l'époque de l'empereur Yao, 24 siècles avant Jésus-Christ. Malheureusement l'existence de l'empereur Yao est incertaine » ([1]).

Il est des cadrans de formes et de disposition variées. Certains sont de véritables œuvres d'art. Tous sont basés sur le même principe. Une baguette, appelée *style*, est fixée sur une *table* (qui peut être verticale aussi bien que horizontale ou oblique). Un cadran, ensemble de rayons issus de la base du style, est dessiné sur la table. La position de l'ombre du style par rapport à ce cadran indique l'heure.



Si un cadran solaire indique l'heure, il s'agit bien évidemment de l'heure solaire. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler rapidement les faits de base à ce sujet.

Comme chacun sait, le globe terrestre est animé de deux mouvements de rotation :

- la rotation diurne, mouvement au cours duquel la terre tourne sur elle-même en 24 heures, autour de l'axe des pôles. Ce mouvement induit un découpage du temps en jours. Il est aussi utilisé afin de définir l'heure.
- la révolution autour du soleil, mouvement qui s'effectue en approximativement 365,25 jours. Ce mouvement induit un découpage du temps en années.

Le découpage en mois n'est pas dû au mouvement de la terre, mais bien à celui de la lune. Le fait que l'année ne comporte pas un nombre entier de jours est la raison des difficultés rencontrées pour fixer un calendrier. L'évolution du calendrier depuis l'antiquité jusqu'à nos jours est un sujet qui comporte des aspects mathématiques intéressants mais que nous n'aborderons pas ci-dessous.

Nous nous intéresserons uniquement au mouvement de rotation diurne et au découpage du jour en 24 heures qu'il permet de définir. Le principe est simple et basé sur le fait que pour un observateur vivant à la surface du globe terrestre, tout se passe comme si c'était le soleil qui tournait autour de la terre en un jour plutôt que la terre autour du soleil.

> *L'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du soleil dans le plan méridien d'un lieu donné définit ce qui est appelé le jour solaire vrai.*

([1]) Les cadrans solaires classiques, *L'Astronomie*, 419–428, 1983

Rappelons que le soleil ne passe pas à la verticale de tous les points de la terre. En fait, il n'est jamais à la verticale que de points situés entre les deux tropiques, c'est à dire des points de latitude comprise entre $-23°27'$ et $+23°27'$. De plus, il ne passe à la verticale d'un de ces points qu'au maximum deux fois par an. C'est donc le passage du soleil dans le plan méridien qui sert de référence. Rappelons donc aussi ce qu'est le plan méridien d'un point de la terre :

> *Le plan méridien du point P situé à la surface de la terre est le plan passant par P et par l'axe de rotation de la terre*

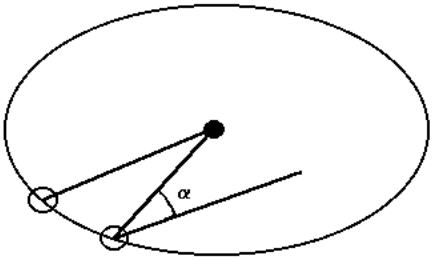
À présent, nous pouvons définir correctement le jour solaire vrai :

> *Le jour solaire vrai est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du soleil dans le plan méridien d'un lieu donné.*

Au moment où le soleil est dans le plan méridien d'un point P, on dit que qu'il est « midi vrai » (s'il fait jour) ou « minuit vrai » (s'il fait nuit). La définition est parfaite et il ne reste plus qu'à trouver un moyen (par exemple un cadran solaire) de découper ce jour solaire vrai en 24 heures pour pouvoir déterminer l'heure.

Cette définition comporte cependant un inconvénient : l'heure dépend du lieu. Deux points n'ont la même heure que s'ils ont le même plan méridien, c'est-à-dire s'ils ont la même longitude. Si cet inconvénient était faible tant que les hommes (et les femmes) restaient dans leur village, il est devenu majeur dès lors que les activités humaines impliquent des déplacements fréquents et importants. De là ont résulté au dix-neuvième siècle l'adoption d'un temps de référence (celui du méridien de Greenwich) et le découpage de la surface terrestre en fuseaux horaires. Ce n'est donc pas l'heure solaire vraie que nos montres renseignent mais une heure « officielle », qui nous est communiquée par la radio (les « tops horaires ») ou l'horloge parlante.

L'heure solaire vraie est affligée d'un autre inconvénient, qui la rend impropre à la consommation. C'est que la durée du jour solaire vrai varie d'un jour à l'autre. Autrement dit, l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs du soleil au méridien d'un lieu donné n'est pas toujours le même. Cela résulte de l'autre mouvement de la terre, le mouvement annuel de révolution autour du soleil.



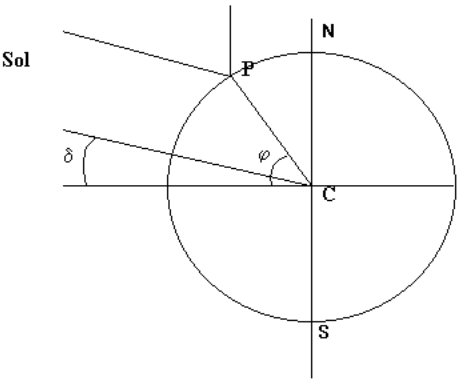
Pendant qu'elle tourne sur elle-même, la terre avance au long de son orbite autour du soleil. Après qu'elle ait effectué un tour complet, le plan méridien d'un point P a repris une position parallèle à sa position initiale, mais ne contient plus le soleil. La terre doit encore tourner d'un (petit) angle α avant que le soleil traverse de nouveau le plan méridien de P.

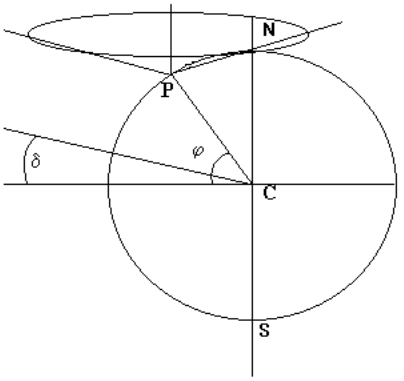
L'angle α vaut environ 4 minutes d'arc. Le jour « vrai » est donc en quelque sorte 4 minutes trop long. Mais il ne s'agit là que d'une première approximation car la trajectoire de la terre étant elliptique, sa vitesse varie au cours de l'année et l'angle α varie aussi. Tout ceci a amené les astronomes à définir plusieurs notions de « jour » : le jour solaire vrai, le jour solaire moyen, ... On peut déterminer l'heure solaire moyenne en appliquant une correction, appelée *équation du temps* à l'heure solaire vraie. (La courbe donnant l'équation du temps est gravée sur certains cadrans solaires.)

Dans ce chapitre, nous ne nous préoccuperons pas des corrections à appliquer au temps solaire vrai pour déterminer le temps solaire moyen, puis le temps officiel. Nous nous contenterons de décrire un cadran solaire fournissant le seul temps solaire vrai. Cela revient à admettre que la terre et le soleil occupent des positions fixes dans l'espace, la terre se contentant de tourner sur elle-même en 24 heures. Comme il est d'usage, nous admettrons aussi que le soleil est suffisamment loin pour que tous les rayons solaires puissent être considérés comme parallèles.

4.2. Où est le soleil ?

Puisque nous ne nous intéressons qu'au mouvement de rotation diurne de la terre, nous admettrons que l'axe de cette rotation est fixe. De cette façon, les rayons solaires ayant toujours la même direction, l'angle entre ceux-ci et l'axe de la terre ne change pas au cours d'une journée.
Mais, pour un observateur terrestre, situé en P, ce n'est pas la terre qui tourne autour du soleil en un jour, c'est le contraire. Le soleil est, pour lui, animé d'un mouvement journalier (que l'on qualifie d'*apparent*).





Puisque l'angle entre le rayon solaire arrivant en P et la direction de l'axe de la terre est invariant, l'observateur a l'impression que ce rayon balaie un cône droit de sommet P et dont l'axe est parallèle à l'axe de la terre. Appelons-le le *cône de soleil*.
La figure ci-contre est destinée à illustrer la situation, mais elle ne présente aucun caractère réaliste puisque le globe terrestre et le cône de soleil sont représentés suivant des conventions différentes

Si la *déclinaison* du soleil, c'est-à-dire l'angle entre les rayons solaires et le plan de l'équateur, est notée δ, l'ouverture du cône de soleil (l'angle entre l'axe du cône et les génératrices) est l'angle complémentaire de δ. Au cours de l'année, δ varie de $-23°27'$ à $+23°27'$. L'ouverture du cône est donc toujours comprise entre $90°$ et $66°33'$. En particulier, l'ouverture vaut $90°$ (de sorte que le cône de soleil est un plan), lorsque le soleil est situé dans le plan de l'équateur, ce qui arrive deux fois par an lors des équinoxes.

4.3. Les cadrans solaires classiques

Le style d'un cadran solaire classique est orienté parallèlement à l'axe de la terre. Le rayon solaire passant par l'extrémité du style balaie donc une cône droit dont l'axe est le style (plus exactement la droite supportant le style). Quel que soit le jour de l'année, le plan déterminé par le style et ce rayon solaire à une heure donnée occupe toujours la même position : c'est le plan méridien à midi (ce serait aussi le plan méridien à minuit si la terre était transparente !), c'est le plan perpendiculaire au plan méridien et passant par le style à 6 h et 18 h, etc. Comme ce plan contient aussi l'ombre du style, la position de celle-ci ne dépend que de l'heure solaire vraie, et indique cette heure. Il suffit de repérer la position de l'ombre à midi, une heure, ..., pour graduer efficacement le cadran.

Pour déterminer l'ombre du style, il suffit aussi de déterminer l'ombre de son extrémité, et de la joindre à la base du style. Nous nous intéresserons donc à *la trajectoire (au cours de la journée) de l'ombre de l'extrémité du style*.

Si la table du cadran solaire est plane, ce qui est généralement le cas, rechercher cette trajectoire revient à rechercher la section du cône par le plan de la table du cadran. La forme de cette section dépend de l'orientation de la table par rapport au style.

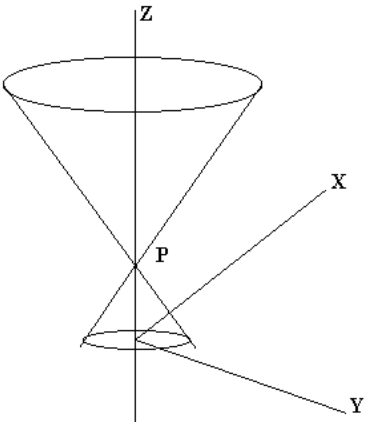
On distingue ainsi des cadrans solaires

- équatoriaux : la table du cadran est perpendiculaire au style, elle est donc parallèle au plan équatorial.
- horizontaux : la table est horizontale. L'angle entre le style et la table est alors la latitude du lieu, que nous notons φ. Il est des lieux sur la terre où un cadran horizontal est aussi équatorial. Lesquels ?
- verticaux : la table est verticale. Ceci ne fixe pas complètement sa position. Les cadrans solaires verticaux sont généralement placés sur la façade d'un bâtiment, ce qui ne permet pas toujours de les orienter comme on le souhaiterait. Les cas les plus simples sont ceux des cadrans orientés Nord-Sud ou Est-Ouest.
- d'orientation quelconque

Nous nous limiterons dans ce qui suit à l'étude des cadrans équatoriaux et horizontaux.

4.4. Où est l'ombre ?

Adoptons un repère orthonormé dont l'origine est le point situé à la base du style, et choisissons la longueur de celui-ci comme unité. Prenons comme axe OZ la droite qui supporte le style, dont l'extrémité est par conséquent le point $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi défini, l'axe OZ est dans le plan méridien de P. Plaçons également l'axe OX dans le plan méridien, perpendiculairement à OZ, et en direction du nord géographique. Le plan XOZ est donc le plan méridien.



Enfin, l'axe OY est placé perpendiculairement à ce plan, donc dans le plan horizontal passant par l'origine, et dans la direction opposée au soleil couchant, c'est à dire vers l'est. De cette façon, l'ombre du style sera superposée à midi à la partie positive de OX et balaiera le premier quadrant au cours de l'après-midi. Notons que le trièdre que nous venons de définir est lévogyre.

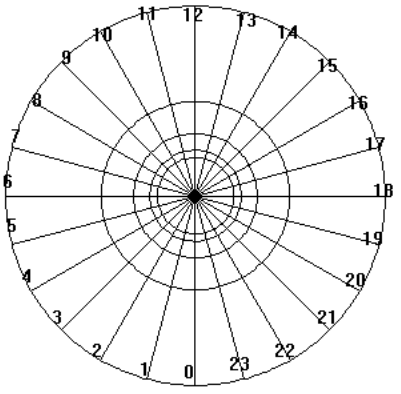
4.4.1 Les cadrans équatoriaux

La table d'un tel cadran est parallèle au plan équatorial. Supposons que le soleil ne soit pas dans ce plan, c'est-à-dire que sa déclinaison δ n'est pas nulle. Alors le cône solaire passant par l'extrémité du style est un cône droit d'axe OZ et son intersection avec le plan OXY est un cercle, dont le rayon vaut $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta) = \mathrm{cotg}\,\delta$. Ceci règle définitivement le cas des cadrans solaires équatoriaux : on les gradue tout simplement en découpant le plan en 24 secteurs de 15°. La trajectoire de l'ombre de l'extrémité du style est alors un cercle dont le rayon varie au cours de l'année de $\mathrm{cotg}\,23°27' \simeq 2,305$ à l'infini.

Les astronomes appellent « angle horaire » l'angle dont la terre a tourné sur elle-même depuis le dernier passage du soeil dans le plan méridien. Cet angle est mesuré en heures, à partir du sud, dans le sens horlogique. Il varie donc de 0h (midi) à 24h, minuit correspondant à H = 12h. Cette pratique des astronomes ne nous convient guère car les fonctions trigonométriques que nous utilisons supposent que les angles sont mesurés en radians. Nous préférons écrire $\cos H$ plutôt que $\cos \frac{\pi H}{12}$. Dans ce qui suit nous nous écartons donc de la pratique des astronomes en admettant que H varie de 0 à 2π, $H = 0$ correspondant à midi et $H = \pi$ à minuit.

Si $Q(H)$ est le point du cercle, parcouru par l'ombre de l'extrémité du style à l'heure H on a

$$Q(H) = \begin{pmatrix} \mathrm{cotg}\,\delta \cos H \\ \mathrm{cotg}\,\delta \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

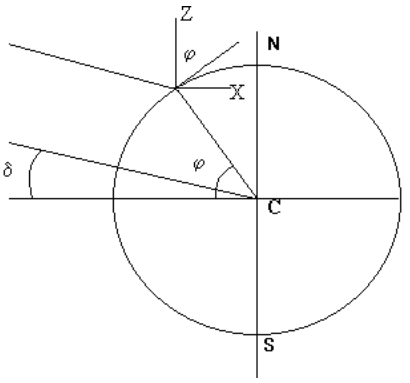


Sur la figure ci-contre, on a représenté, de l'extérieur vers l'intérieur, les cercles correspondant aux valeurs 5°, 10°, 15°, 20° et 23°27′ de la déclinaison du soleil.

Notons qu'un cadran équatorial n'est utilisable que durant la demi-année durant laquelle le soleil et le style se trouvent du même côté de la table, c'est-à-dire de l'équinoxe de printemps à celle d'automne pour les lieux situés dans l'hémisphère nord. Il n'est pas non plus utilisable aux moments des équinoxes puisque, la cotangente de 0° n'étant pas définie, le point $Q(H)$ ne l'est pas non plus.

4.4.2 Les cadrans horizontaux

Il est sans doute plus facile d'installer un cadran horizontal qu'un cadran équatorial puisque sa table est ...horizontale. Nous pouvons assez facilement trouver l'équation du plan horizontal ζ passant par l'origine (la base du style) par rapport au système d'axes choisi précédemment. En effet, le plan XOZ est le plan méridien et l'axe OY est situé dans le plan horizontal. De plus l'angle de l'axe OZ avec le plan horizontal est la latitude φ du lieu.



L'équation du plan horizontal ζ est donc

$$x\cos\varphi - z\sin\varphi = 0$$

Un vecteur normal au plan ζ est le vecteur $N = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

- Au paragraphe précédent, dans le cas où le soleil n'est pas dans le plan de l'équateur ($\delta \neq 0$), nous avons déterminé l'ombre $Q(H)$ de l'extrémité du style (le point P) sur le plan perpendiculaire au style. Pour trouver l'ombre de P sur le plan horizontal, il suffit de déterminer l'intersection de la droite $PQ(H)$ et du plan ζ. Nous utiliserons dans ce but l'équation vectorielle

  $$X = P + s(Q(H) - P)$$

  (où $s \in \mathbb{R}$) de la droite $PQ(H)$.
- Dans le cas où $\delta = 0$, le rayon solaire passant par P à l'heure H a comme équation vectorielle

  $$X = P + s\begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, nous devons rechercher la valeur de s pour laquelle $X \in \zeta$, ce qui revient à résoudre l'équation $N \cdot X = 0$.

La valeur de s est donc donnée par

si $\delta \neq 0$:

$$N \cdot P + sN \cdot (Q(H) - P) = 0$$

Puisque $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Q(H) - P = \begin{pmatrix} \operatorname{cotg}\delta \cos H \\ \operatorname{cotg}\delta \sin H \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$s = -\frac{N \cdot P}{N \cdot (Q(H) - P)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos H}$$

et l'ombre de P sur ζ est

$$\begin{aligned} R_\delta(H) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{cotg}\delta \cos H \\ \operatorname{cotg}\delta \sin H \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\operatorname{cotg}\delta}{\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos H} \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos H \\ \sin\varphi \sin H \\ \cos\varphi \cos H \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos H}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si $\delta = 0$:

$$N \cdot P + sN \cdot \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

D'où $s = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi \cos H}$ et

$$R_0(H) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos H} \begin{pmatrix} \cos H \\ \sin H \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ayant calculé $R_\delta(H)$ dans les deux cas $\delta \neq 0$ et $\delta = 0$, notons C_δ la courbe parcourue par le point $R_\delta(H)$ pour une valeur déterminée de la déclinaison δ du soleil.

Etudions les courbes C_δ, en commençant par le cas $\delta = 0$. Nous pouvons alors écrire

$$R_0(H) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{tg} H \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg}\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

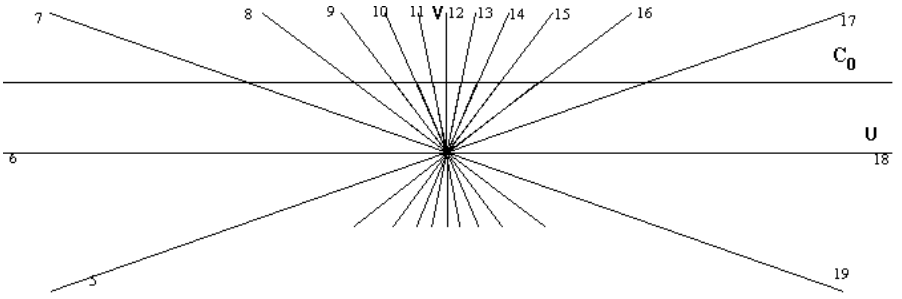
La courbe C_0 décrite par l'ombre du style est donc une droite passant par le point $R_0(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et parallèle à l'axe OY.

Introduisons dans le plan ζ un repère orthonormé OUV, en plaçant l'origine au point O (qui est aussi l'origine de l'espace), en superposant l'axe OU à OY et en plaçant OV perpendiculairement à OU. L'axe OV est donc orienté vers le nord géographique et l'axe OU vers l'est. Le point $R_0(0)$ est alors situé sur l'axe OV, à la distance $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$ de l'origine. La droite C_0 est la parallèle à OU passant par $R_0(0)$. L'abscisse de $R_0(H)$ dans le plan OUV vaut $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H$ puisque $R_0(H) = R_0(0) + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans le système de coordonnées qui vient d'être défini, nous pouvons écrire

$$R_0(H) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \\ \dfrac{1}{\cos\varphi} \end{pmatrix}$$

Comme 24 heures correspondent à un angle de 2π radians, nous marquerons sur C_0 les points $R_0(H)$ correspondant à $H = 0$, $H = \pi/12$, $H = 2\pi/12$, etc, et nous retrouverons la pratique des astronomes en les notant 12, 13, ..., 11.

Nous savons que la direction de l'ombre du style en un moment déterminé de la journée ne dépend pas de la déclinaison du soleil. Nous pouvons donc dès à présent tracer les droites qui joignent l'origine du plan OUV (qui est la base du style du cadran) aux points qui viennent d'être marqués sur la droite C_0. Pour la latitude $\varphi = 50°$, nous obtenons ainsi la figure ci-dessous, sur laquelle les indications de 20 h, à 4 h n'ont pas été mentionnées, les ombres étant rarement observables lorsquele soleil est couché ! Cette figure peut être utilisée pour connaître l'heure solaire vraie en observant la direction de l'ombre du style.



A présent, étudions les courbes C_δ. En observant sur laquelle de ces courbes se trouve l'ombre de l'extrémité du style, nous saurons (approximativement) quelle est la déclinaison du soleil (donc la date).

Nous avons déterminé la valeur de $R_\delta(H)$:

$$R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\cos H}{\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi + \cos H} R_0(H)$$

Remarquons immédiatement que cette formule montre en particulier que les points $R_\delta(H)$ et $R_0(H)$ sont alignés avec l'origine quel que soit δ, ce qui confirme qu'à une heure déterminée, la direction de l'ombre du style est la même tous les jours de l'année.

Intéressons-nous aussi au dénominateur $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H$. Il peut être nul : si $\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$. Si le dénominateur est nul, c'est que le point $R_\delta(H)$ se trouve ...à l'infini. Plus précisément, rappelons-nous que $R_\delta(H)$ est le point de percée de la droite $PQ(H)$ dans le plan ζ. Dire que le dénominateur est nul signifie que le rayon du soleil est parallèle au plan horizontal ζ, donc qu'il est lui-même horizontal. Cela se produit *au lever et au coucher astronomiques* du soleil ...pour autant que le soleil se lève et se couche : n'oublions pas l'existence du soleil de minuit !

Les solutions éventuelles de l'équation

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

sont donc les heures de lever et de coucher astronomiques du soleil à l'emplacement du cadran solaire. Par exemple, à la latitude $\varphi = 50°$ (latitude approximative des ardennes belges), le jour du solstice d'été ($\delta = 23°27'$), les heures de lever et de coucher du soleil sont données par l'équation $\cos H = -0.516953$, d'où $H_1 = -121,128°$ et $H_2 = 121,128°$. Après conversion de ces angles en heures-minutes-secondes (et en tenant compte de ce que l'angle $H = 0$ correspond à midi), nous constatons que le soleil se lève ce jour là (qui est le plus long de l'année) à 3 heures 55 minutes et se couche à 20 heures 5 minutes. Rappelons qu'il s'agit ici de l'heure solaire vraie qui nécessite donc diverses corrections après lesquelles il apparaît que les heures de lever et de coucher du soleil ne sont que rarement symétriques par rapport à midi.

Comment se fait-il qu'il arrive que le soleil ne se couche pas ? Reprenons l'équation $\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$. Pour qu'elle ait des solutions, il faut que $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$ soit compris entre -1 et $+1$. La condition peut s'écrire $|\operatorname{tg}\varphi| \leqslant |\operatorname{cotg}\delta|$, ou encore $|\operatorname{tg}\varphi| \leqslant |\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta)|$.

Par exemple, en un point de l'hémisphère nord, pour que le soleil soit visible durant une journée complète, il faut avoir $\varphi > \frac{\pi}{2} - \delta$. Le point le plus au sud de l'hémisphère nord où il est possible d'admirer le soleil de minuit au moins une fois par an s'obtient le jour du solstice d'été, quand la valeur de δ est maximale : $23°27'$. Dans ce cas on doit avoir $\varphi \geqslant 66°33'$, le point le plus au sud correspondant à $\varphi = 66°33'$. C'est la latitude du cercle polaire arctique. A cette latitude, le jour du solstice d'été à minuit, le soleil est situé au nord et vient raser l'horizon à minuit,

Revenons à notre courbe C_δ parcourue par l'ombre $R_\delta(H)$ de l'extrémité du style. Si $|\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta| < 1$, le dénominateur $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H$ de $R_\delta(H)$ s'annule pour deux valeurs H_1 et H_2 de H, de sorte que la courbe admet deux directions asymptotiques. Le soleil n'est levé que pour $H_1 < H < H_2$, c'est donc la portion de la courbe C_δ déterminée par cette inéquation qui doit être tracée sur la table du cadran solaire. Ci-dessous, nous déterminerons l'équation de l'intégralité de C_δ, mais nous ne devrons pas oublier que seule une portion de cette courbe est utile.

Remarquons aussi que si $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta = 1$, l'équation n'a qu'une seule solution, $H = \pi$: c'est bien, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, à minuit que le soleil vient éventuellement raser l'horizon et est en fait visible durant au moins 24 heures consécutives. Dans ce cas, la courbe C_δ n'admet qu'une direction asymptotique, mais elle reste non bornée. Elle ne se ferme pas dans le plan. Enfin, si $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta > 1$, la courbe C_δ est bornée et fermée, elle n'a pas de directions asymptotiques.

Recherchons une équation de C_δ. Puisque $R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos t} R_0(H)$ et que dans le système d'axes choisi dans le plan OUV, nous pouvons écrire $R_0(H) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \\ \frac{1}{\cos\varphi} \end{pmatrix}$, dans ce système d'axes, nous avons

$$R_\delta(H) = \frac{\cos H}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} H \\ \dfrac{1}{\cos\varphi} \end{pmatrix}$$

Notons u et v les coordonnées dans le plan OUV. Des équations paramétriques de C_δ sont donc

$$\begin{cases} u = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi \sin H}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H} \\ v = \dfrac{\cos H}{\cos\varphi(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos H)} \end{cases}$$

Eliminons H. En divisant les deux expressions membre à membre, on obtient

$$\frac{u}{v} = \sin\varphi \operatorname{tg} H$$

D'où $\operatorname{tg} H = \frac{u}{v \sin\varphi}$. De la deuxième équation, on tire aussi $\cos H = \frac{v \sin\varphi \operatorname{tg}\delta}{1 - v\cos\varphi}$

En exploitant l'identité $1 + \operatorname{tg}^2 H = \frac{1}{\cos^2 H}$, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \frac{v^2 \sin^2\varphi + u^2}{v^2 \sin^2\varphi} &= \frac{(1 - v\cos\varphi)^2}{v^2 \sin^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta} \\ v^2 \sin^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta + u^2 \operatorname{tg}^2\delta &= 1 - 2v\cos\varphi + v^2\cos^2\varphi \end{aligned}$$

Si nous ne sommes pas en un pôle ([2]), nous pouvons diviser par $\cos^2\varphi$:

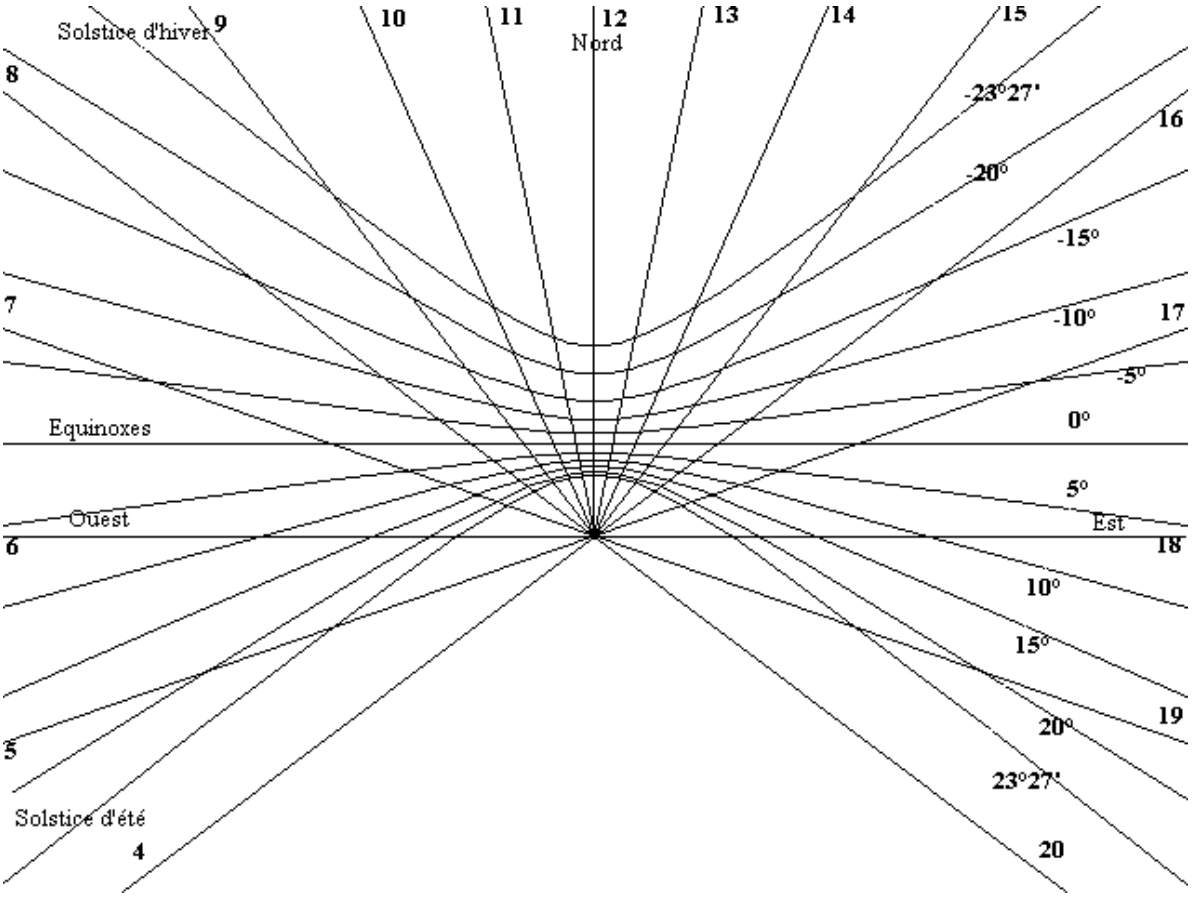
([2]) Et si nous sommes en un pôle, le cadran horizontal est identique à un cadran équatorial, la courbe C_δ a pour équation $u^2 + v^2 = \operatorname{cotg}^2\delta$, ce que nous savions.

$$u^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\cos^2 \varphi} + v^2(\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1) + 2\frac{v}{\cos \varphi} = 1$$

Cette équation est celle d'une ellipse si $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 > 0$, d'une parabole si $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 = 0$ et d'une hyperbole si $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$. La condition $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$ est équivalente à $|\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta| < 1$, condition déjà rencontrée. Elle est satisfaite en un lieu de latitude φ, le jour où la déclinaison du soleil vaut δ, si et seulement si le soleil n'est pas visible durant 24 heures consécutives en ce lieu. Dans ce cas nous savions déjà que la courbe C_δ avait deux directions asymptotiques. Nous voyons maintenant qu'en fait, c'est une hyperbole. Par contre, les jours où brille le soleil de minuit à la latitude φ, la courbe C_δ est une ellipse. Enfin la courbe peut-être une parabole. C'est par exemple le cas en les points du cercle arctique le jour du solstice d'été.

Plaçons-nous en un lieu et un jour qui vérifient la condition $\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 < 0$. (C'est le cas en Belgique toute l'année.) La courbe C_δ est donc une hyperbole. Mais entre le lever et le coucher du soleil, seule une branche de l'hyperbole est parcourue par l'ombre de extrémité du style du cadran. L'autre branche de l'hyperbole sera cependant parcourue par cette ombre lorsque la déclinaison du soleil vaut $-\delta$. Car l'équation de C_δ montre bien que les hyperboles C_δ et $C_{-\delta}$ sont identiques.

Il reste à appliquer les techniques usuelles d'étude et de dessin des coniques pour réaliser la figure suivante, représentant la table d'un cadran solaire horizontal pour les lieux de latitude 50°. Y sont dessinées les hyperboles C_δ correspondant aux valeurs $\pm 5°$, $\pm 10°$, $\pm 15°$, $\pm 20°$ et $\pm 23°27'$ de la déclinaison δ du soleil. L'étiquette δ figurant sur une branche d'une hyperbole mentionne que c'est cette branche qui est parcourue par l'ombre de l'extrémité du style lorsque la déclinaison vaut δ. Dans ce cas la seconde branche de la même hyperbole porte l'étiquette $-\delta$. Sur la figure sont également représentées les droites indiquant la direction de l'ombre, heure par heure. La droite correspondant à l'heure H coupe la branche correspondant à δ si, le jour où la déclinaison vaut δ, le soleil se lève avant l'heure H et se couche après celle-ci.



Tracé d'un cadran solaire pour un lieu de latitude 50°.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Le programme `Reseau.exe`

A.1 Introduction 225
A.2 La structure du programme 226
A.3 Les menus 227
A.3.1 Le menu Projet 228
A.3.2 Le menu Transformation 231
A.3.3 Le menu Représentation 232
A.3.4 Le menu Couleurs 237
A.4 Les icônes 238
A.4.1 Les icônes de création 239
A.4.2 L'icône de dénomination 241
A.4.3 Les icônes d'exécution 242

A.1. Introduction

Le programme `Reseau.exe` a pour premier objectif de fournir à l'enseignant un moyen simple pour réaliser des figures de géométrie de l'espace faisant appel à un réseau cubique et à l'usage de coordonnées. Il permet en particulier de réaliser la plupart des figures rencontrées dans le présent fascicule. Ses performances en tant qu'outil de construction de figures spatiales plus générales sont limitées.

Trois modes de représentation sont disponibles : la perspective centrale, la projection orthogonale et la perspective cavalière. A tout moment, il est possible de modifier en continu les paramètres de la représentation choisie, ce qui revient par exemple à faire tourner l'objet représenté sous les yeux de l'observateur. Ce procédé devrait se révéler une aide puissante pour former la perception spatiale de ceux qui éprouvent des difficultés à « voir dans l'espace ».

Par ailleurs, les figures apparaissant à l'écran peuvent être imprimées sans difficulté, ce qui constitue un moyen simple de fournir aux élèves des figures de base de bonne qualité, figures qu'ils peuvent compléter selon les activités réalisées en classe.

Le programme `Reseau.exe` est un programme DOS, qui doit pouvoir fonctionner sur n'importe quel ordinateur PC-IBM ou compatible, disposant d'une carte graphique VGA. Il est cependant à conseiller d'utiliser une machine assez rapide. En particulier, les routines permettant de faire tourner les objets à l'écran nécessitent beaucoup de calculs entre deux dessins successifs. Les ordinateurs équipés d'un processeur antérieur au modèle 486 ne donneront pas sur ce point de résultat satisfaisant.

Quant à l'impression, les meilleurs résultats seront obtenus avec des imprimantes de type postscript, ou des imprimantes comprenant le langage PCL5. Sur les autres imprimantes, l'impression est réalisée par copie d'écran.

On trouvera dans cette annexe une simple description du fonctionnement technique des différentes routines proposées par le programme. Pour des situations pédagogiques à illustrer par le programme, on se référera d'abord aux différentes fiches présentes dans ce fascicule, mais aussi à l'annexe 2.

Installation Pour installer le programme `Reseau.exe`, il suffit de le copier dans le répertoire de son choix.

A.2. La structure du programme

Lorsque le programme débute, l'utilisateur se trouve devant un écran comportant

- au long du bord supérieur : une ligne de menus,
- au long du bord gauche : une colonne d'icônes,
- au long des bords inférieur et droit : des ascenseurs,
- dans le coin inférieur droit : une icône représentant une bombe (!),
- au centre : un système d'axes et un cube.

Les menus concernent l'environnement général d'exécution du programme. Les icônes permettent de créer des objets géométriques. Les ascenseurs permettent de modifier les paramètres de la représentation. La bombe permet de détruire un objet.

Le système d'axes et le cube constituent la figure intéressante.

Nous allons passer en revue ces divers éléments.

A.3. Les menus

La barre de menus située en haut de l'écran comporte quatre éléments :

Projet	Transformation	Représentation	Couleurs

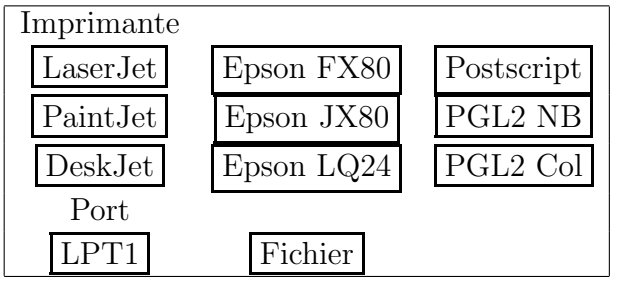
Le menu Projet contient les routines permettant d'enregistrer ou de charger une situation, ainsi que celles qui gouvernent l'impression. Avec Représentation et Couleurs, ce sont les paramétres de la représentation plane d'objet à trois dimensions et les couleurs utilisées qui sont modifiables. Enfin, Transformation permet de définir un projecteur de l'espace sur un plan, parallèlement à une droite, une homothétie de l'espace, et une translation.

A.3.1 Le menu Projet

Ce menu comprend plusieurs sous-menus :

- Nouveau détruit tous les objets définis antérieurement, efface l'écran et réinitialise le programme.
- Ouvrir affiche la liste des fichiers d'extension « .res » disponibles dans le répertoire courant du disque dur. L'utilisateur peut en sélectionner un et charger son contenu. Il est possible de changer de répertoire ou de lecteur de disque. Pour quitter cette routine sans charger de fichier, appuyez sur la touche End.
- Enregistrer crée sur le disque dur un fichier d'extension « .res » contenant les informations nécessaires pour redessiner ultérieurement les figures actuellement présentes. Les paramétres de la représentation sont également stockés. L'extension « .res » ne doit pas être introduite par l'utilisateur. Si celui-ci choisit un nom déjà attribué à un fichier du répertoire courant du disque dur, un message lui demande de confirmer son choix.
- Imprimante permet de définir l'imprimante connectée à l'ordinateur, et de choisir entre imprimer directement sur imprimante, dans un fichier, ou sous forme d'une image de format bmp qui peut être récupérée dans un programme de traitement d'image.

  La boîte de dialogue suivante apparaît à l'écran :



1. Si vous désirez imprimer directement, choisissez d'abord. une imprimante.
   Commençons par décrire les sept cases qui correspondent à des imprimantes en noir et blanc. Si vous avez la chance d'avoir une imprimante qui comprend le langage Postscript, effectuez ce choix de préférence. Le choix PGL2 NB est opportun si vous avez une imprimante qui comprend le langage graphique PCL5 (ou postérieur) dont PGL2 est un sous-langage. C'est le cas des HP LaserJet III (ou postérieures). Si vous avez une HP LaserJet II (ou antérieure), sélectionnez la case LaserJet.

Les choix PaintJet et DeskJet sont évidemment destinés à ces imprimantes, tous modèles (mais si vous avez un modèle très récent, vérifiez s'il ne comprend pas le PCL5 et le PGL2).

Choisissez une des cases Epson si vous avez une imprimante à aiguilles. (Elles sont souvent compatibles avec les Epson). Les anciens modèles comportent généralment neuf aiguilles. Dans ce cas, choisissez Epson FX80. Les plus récentes en ont 24. Dans ce cas, utilisez Epson LQ24.

La dernière imprimante Epson prévue est la Epson JX80. C'est une imprimante couleurs à 9 aiguilles, assez ancienne. Elle est très peu fréquente. Enfin, si vous avez une imprimante couleurs récente qui comprend le PCL5, choisissez PGL2 Col. Ce choix convient par exemple pour les HP LaserJet Color et HP DeskJet 1200C et 1500C.

Après avoir choisi une imprimante, il vous reste à indiquer à quel port cette imprimante est connectée. Par défaut, la case intitulée « Port » comporte la mention « LPT1 », qui est le nom habituel du port parallèle. Généralement, il suffit de ne pas modifier cette mention.

Vérifiez enfin que les cases Fichier et Image .bmp n'ont pas été sélectionnées. Eventuellement, déselectionnez-les en cliquant dessus.

2. Vous pourriez souhaiter imprimer dans un fichier par exemple pour pouvoir réimprimer une figure ultérieurement sans devoir relancer le programme. Dans ce cas, choisissez d'abord une imprimante comme ci-dessus, puis cochez la case Fichier. Le fichier qui sera créé aura une extension indiquant à quelle imprimante il est destiné. Le tableau qui suit reprend ces extensions :

LaserJet : LJ	Epson FX80 : FX	Postscript : eps
PaintJet : PJ	Epson JX80 : JX	PGL2 NB : plt
DeskJet : DJ	Epson LQ24 : LQ	PGL2 Col : plt

Il est un autre cas où il peut s'avérer utile d'imprimer d'abord dans un fichier : celui où votre ordinateur fait partie d'un réseau et n'a accès à une imprimante qu'à travers ce réseau. Dans ces conditions, il semblerait normal de remplacer « LPT1 » par la dénomination du port-réseau dans la boîte de dialogue. L'expérience montre que cela n'est pas toujours suffisant pour pouvoir imprimer. Si vous avez des difficultés de ce genre, essayez d'imprimer votre image dans un fichier, puis imprimez le fichier à l'aide d'un autre logiciel que `reseau.exe`. Il suffit normalement de revenir sous `DOS` et d'utiliser alors soit l'instruction `print`, soit l'instruction `copy`. Si vous travaillez sous `Windows 95`, des difficultés sont à craindre, car ce système d'exploitation semble s'être ingénié à compliquer les tâches d'impression directe (même quand on ne travaille pas dans un réseau). dans ce cas, copiez d'abord l'écran dans une image de format `bmp` (voyez plus loin), puis récupérez cette image dans un programme de traitement d'images tel que `Paintbrush`, et imprimez-la à partir de là. Nous ne garantissons pas que des distorsions ne se seront pas produites entretemps ...

– Imprimer permet, comme le nom l'indique, d'imprimer la figure. Si une imprimante a déjà été sélectionnée, le logiciel considère d'office que c'est encore cette imprimante-là qui va être utilisée. De même, le choix « Imprimante » ou « Fichier » est conservé. Si ces choix doivent être modifiés, il est nécessaire de repasser par la la routine Imprimante.

  Si l'imprimante choisie est de l'un des types Postscript, PGL2 NB ou PGL2 Col, une boîte de dialogue apparaîtra dans laquelle l'utilisateur pourra indiquer les dimensions de la figure imprimée. Ceci permet de corriger d'éventuelles distorsions de la figure.

  Enfin, si l'utilisateur a choisi d'imprimer dans un fichier, le nom de celui-ci lui sera demandé. L'extension ne doit pas être indiquée.

– Image Après avoir fait ce choix, vous serez invité à donner un nom à l'image. Elle sera alors sauvée dans un fichier d'extension `bmp` que vous pourrez ensuite retravailler dans un logiciel de traitement d'image ou utiliser dans un film video ...

– DOS permet de quitter temporairement le programme pour lancer une commande DOS. On revient au programme par la commande EXIT.

– Quitter est la routine qui permet de stopper le programme. Il est tout aussi simple de pousser sur la touche `End`. Les paramètres de configuration du programme (mode de représentation, imprimante, couleurs) sont alors conservés pour une session ultérieure.

– Aide affiche un panneau rappelant que pour chaque élément de menu, une aide est acessible à l'écran en utilisant la touche `F1`, lorsque cet élément est affiché en surbrillance.

A.3.2 Le menu Transformation

Ce menu donne accès à trois sous-menus :

1. **Projecteur**
   Pour définir un projecteur (sur un plan parallèlement à une droite), on devra d'abord définir la direction de projection. Ceci se fait en cliquant sur deux points déjà présents à l'écran.

   > Sélectionner un point dans le plan de l'écran ne permet pas de déterminer un point de l'espace puisque, quel que soit le mode de représentation utilisé, toute une droite de l'espace correspond au même point de l'écran. Aussi, le programme ne peut choisir effectivement que des points qui ont déjà été marqués, et dont il connaît les coordonnées.
   >
   > Lorsque le curseur de la souris indique un point de l'écran qui correspond à un point connu de l'espace, d'une part le curseur change de forme, d'autre part les coordonnées spatiales du point apparaissent sous le curseur de la souris. C'est seulement dans ce cas qu'il est utile de presser le bouton (gauche).

   Aprés avoir défini la direction de projection, il est encore nécessaire de sélectionner trois points afin de déterminer le plan de projection. La procédure est analogue à la précédente. Le projecteur est alors bien défini, mais cela n'apparaît pas d'une quelconque façon à l'écran.
   Si l'utilisateur a choisi une direction de projection parallèle au plan de projection, le fait lui est signalé, et il est invité à recommencer.
2. **Homothétie** Pour définir une homothétie, on sélectionne d'abord un point, qui en sera le centre. Ensuite on introduit le rapport d'homothétie dans une boîte de dialogue.
3. **Translation** Pour définir une translation, il suffit de sélectionner un point et son image.

Chacune des routines Projecteur, Homothétie et Translation peut être utilisée autant de fois qu'on le désire, mais pour chacune d'entre elles, seule la transformation introduite en dernier lieu est mémorisée. On peut ainsi avoir simultanément en mémoire une transformation de chaque espèce, et une seule.

> Si vous voulez abandonner l'exécution d'une routine que vous avez entamée par erreur, essayez la touche Escape. Parfois on interrompt ainsi l'exécution intempestive.

A.3.3 Le menu Représentation

Ce menu permet

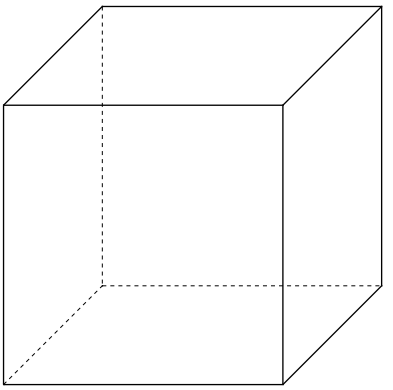
- de choisir le mode de représentation graphique des solides de l'espace : en perspective centrale, en projection orthogonale ou en perspective cavalière,
- de zoomer,
- de choisir le mode de représentation des arèes des cubes : en vu et caché, en transparent ou en opaque,
- de choisir l'orientation du trièdre de référence.

1. Mode de représentation des solides :
   Les trois éléments du menu sont les suivants :

   Le choix d'une représentation plane de figures spatiales est un peu une question de circonstances. On peut conseiller de choisir, si possible, une représentation qui conserve celles des caractéristiques d'une figure que l'on veut étudier.

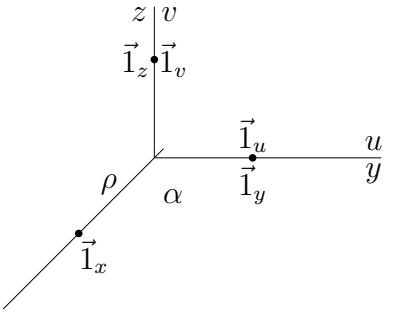
   Par exemple, la perspective cavalière et la projection orthogonale sont des projections affines. Elles conservent la linéarité, le parallélisme, les rapports de longueurs de segments parallèles. Mais elles ne conservent pas les valeurs des angles, sauf si les côtés de ces angles sont situés dans des plans parallèles au plan de projection. La perspective centrale est une transformation projective. Elle ne conserve guère que l'alignement, la concourance et . . .le birapport. On ne la rencontre pas souvent dans l'enseignement secondaire. Et cependant, c'est elle qui correspond le mieux à notre vision, comme l'ont finalement compris les peintres de la renaissance. Elle peut donner lieu à une réflexion intéressante, ayant tant des aspects artistiques que scientifiques.

   a. La représentation la plus populaire est la perspective cavalière. Elle convient particulièrement bien pour représenter un cube dont deux faces sont parallèles au plan de représentation. Elle permet donc des dessins assez simples dans ce contexte là.



Elle est par ailleurs assez peu réaliste, en ce sens que l'image d'un objet qui se forme sur notre rétine, puis dans notre cerveau, n'est pas une perspective cavalière de cet objet. On s'en convainc aisément en faisant varier les paramètres de la représentation.

La perspective cavalière est une projection affine de l'espace sur un plan dans laquelle la direction de projection est quelconque. Par contre, nous choisissons toujours le même plan de projection : le plan YOZ. Seule, la direction de projection est donc à définir : elle l'est par le point $\vec{1}_x$ et son image.



Deux paramètres suffisent donc pour définir une perspective cavalière : nous choisissons les coordonnées polaires (ρ et α) de l'image de $\vec{1}_x$ dans le plan yoz.
Pour simplifier, nous appelons (u, v) les coordonnées cartésiennes dans le plan image YOZ et par conséquent $\vec{1}_u = \vec{1}_y$ et $\vec{1}_v = \vec{1}_z$

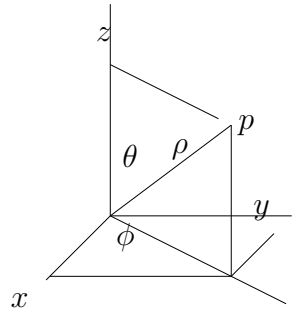
La perspective cavalière de paramètres ρ et α est l'application linéaire qui applique le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sur le point de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha & 1 & 0 \\ \rho\sin\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les deux paramètres ρ et α, dénommées respectivement « Coefficient » et « Angle » peuvent être modifiés à volonté en déplaçant des curseurs au long d'ascenseurs. Il en est de même pour les paramètres qui commandent les autres routines de représentation.

b. La projection orthogonale correspond à la vision que nous avons d'un objet situé très loin. Un observateur est supposé se trouver à l'infini, définissant ainsi une direction, la direction du regard. Les figures spatiales sont projetés sur un plan π, orthogonal à cette direction passant par l'origine des axes.

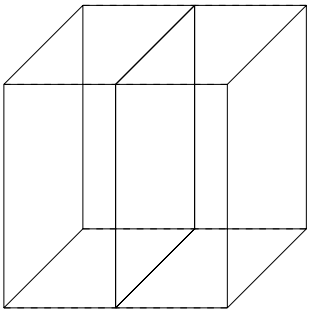
La direction de projection, c'est-à-dire la direction du regard de l'observateur, est déterminée selon le système des coordonnées polaires de l'espace par deux angles : la colatitude θ et la longitude ϕ.



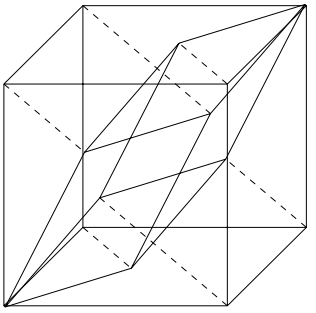
Une base orthonormée $(\vec{1}_u, \vec{1}_v)$ est choisie dans le plan π. Clairement, elle n'est déterminée qu'à une rotation près, ce qui introduit un troisième paramètre σ, que nous appellerons l'angle de *pivotement*. En faisant varier cet angle, on donne l'impression que la figure observée effectue un mouvement de rotation autour de la droite joignant l'origine à l'œil de l'observateur.

Les formules permettant de calculer les coordonnées (u, v) de la projection sur π d'un point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace sont les suivantes, dans le cas où $\sigma = 0$ (sinon, on compose avec une rotation d'angle σ :

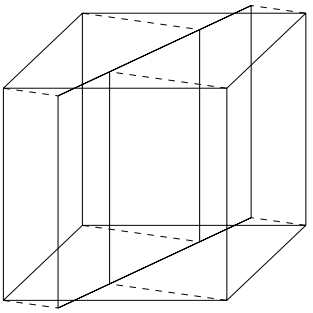
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



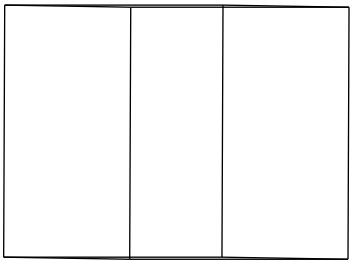
Le cube est projeté sur un de ses plans médians, orthogonalement à ce plan. La direction de projection est donc celle d'une arête du cube et l'image est un carré médian.



Le cube est projeté sur un plan passant par son centre, qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à une face. L'image ne présente aucun angle droit.

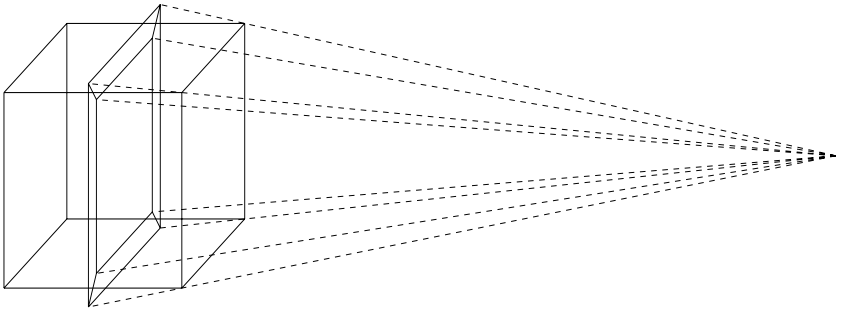


Le cube est projeté sur un plan perpendiculaire à une face. Ce plan est donc parallèle à quatre arêtes et certains angles droits sont conservés.

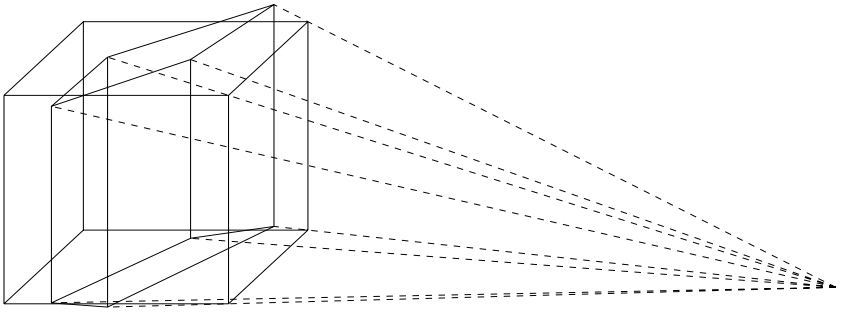


Projection affichée par le logiciel dans le cas de la figure ci-contre.

c. La perspective centrale est basée sur le même principe que la projection orthogonale à ceci près que l'observateur, au lieu d'être à l'infini, est à distance finie. La figure spatiale à représenter est donc projetée sur un plan, à partir d'un point fixe assimilé à l'oeil d'un observateur.

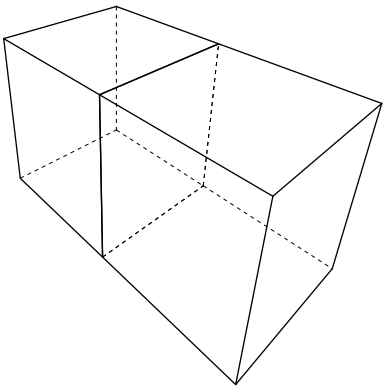


L'œil est à la hauteur du centre du cube, le plan de projection est parallèle une face.



L'oeil est dans le plan de base du cube dont aucune face n'est parallèle au plan sur lequel on projette.

Dans le logiciel `Reseau.exe`, le plan sur lequel on projette passe par l'origine et est perpendiculaire à la direction de l'œil de l'observateur. Cette direction est déterminée par les trois mêmes paramètres angulaires que dans le cas de la projection orthogonale. Un quatrième paramètre intervient : la distance de l'observateur à l'origine des axes. En modifiant cette distance, on peut réaliser des effets de perspective saisissants.



Deux cubes isométriques

2. Zoom Ce menu n'appelle guére de commentaires : en déplaçant un curseur au long d'un ascenseur, on modifie à volonté la taille de la figure. Le coefficient de proportionnalité varie de 0 à 2.

3. Les trois éléments suivants du menu sont relatifs au mode de dessin des arêtes cachées des cubes (et uniquement de ces arêtes). Trois possibilités sont proposées :

   Vu et caché | Transparent | Opaque

   Par défaut, le mode de fonctionnement est le mode « Vu et caché » Les arêtes vues sont dessinées en traits pleins, les arêtes cachées en pointillés. Les dessins se conforment strictement à ces conventions tant qu'ils ne comprennent ni polygones (autres que les faces des cubes) ni cubes imbriqués l'un dans l'autre.

   Le dessin est encore correct si les cubes dessinés forment ensemble un polyèdre convexe, et cela même si des polygones y figurent. Dans les autres cas, le programme mériterait d'être amélioré.

   Le mode « Transparent » ne pose aucun problème : toutes les arêtes sont représentées en traits pleins.

   Le mode « Opaque » ne présente de faiblesses qu'au cas où l'utilisateur a défini des cubes imbriqués l'un dans l'autre. Mais en mode opaque, on ne peut évidemment rien apercevoir des objets situés à l'intérieur des cubes !

4. Dernier élément de ce menu : Tr. lévogyre

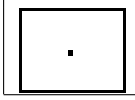
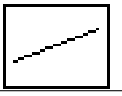
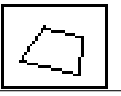
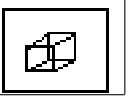
   Ce choix permet de modifier l'orientation du trièdre de référence. Au départ, ce trièdre est *dextrogyre*, et l'indication qui apparaît au menu est « Tr. lévogyre ». Si on effectue ce choix, l'indication sera remplacée par « Tr. dextrogyre ». Le menu indique donc toujours l'orientation opposée à celle qui est en cours.

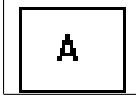
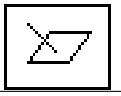
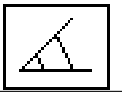
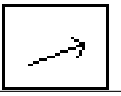
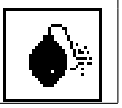
A.3.4 Le menu Couleurs

Ce menu ne pose guère de problèmes. Il permet à l'utilisateur de modifier à volonté les couleurs utilisées. Après avoir sélectionné Couleurs, l'écran affiche des rectangles des seize couleurs possibles. En cliquant sur une quelconque d'entre elles, on accède aux ascenseurs qui permettent de modifier les composantes rouge, verte et bleue de la couleur choisie.

A.4. Les icônes

Les icônes (y compris la bombe) sont au nombre de 10. Nous les répertorions dans le tableau suivant :

Point	Segment	Droite	Polygone	Cube
				

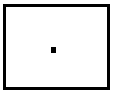
Lettre	Projecteur	Homothétie	Translation	Bombe
				

Ces neuf icônes se répartissent en trois groupes :

1. les icônes de création : Point, Segment, Droite, Polygone et Cube,
2. l'icône de dénomination : Lettre,
3. les icônes d'exécution : Projecteur, Homothétie, Translation, Bombe.

A.4.1 Les icônes de création

Comme le nom l'indique, ces icônes servent à créer des objets géométriques. De façon plus précise encore, l'icône « Point » sert à créer un point, . . .Indiquons comment elles fonctionnent.

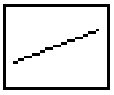


En cliquant sur cette icône, vous faites apparaître deux messages successifs. Le premier vous demande de sélectionner deux points déjà existants. A noter qu'au lancement du programme, des points sont déjà définis (sans quoi nous serions en présence d'un cercle vicieux). Il s'agit des points de coordonnées entières, comprises entre -3 et 3. Seuls sont dessinés les huit sommets du cube originel.

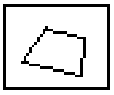
Après avoir choisi deux points, donc une droite, vous devrez indiquer une abscisse dans une boîte de dialogue. Il s'agit de l'abscisse du point sur la droite choisie (les points d'abscisses 0 et 1 étant respectivement le premier et le deuxième point que vous avez sélectionés). Par exemple, si vous choisissez l'abscisse $\frac{1}{2}$, vous aurez défini le milieu du segment. L'abscisse -1 correspond au symétrique du deuxième point par rapport au premier, etc.

De cette façon, vous pourrez définir des points avec toute la précision voulue, et par la même occasion, vous combinez travail de géométrie pure et travail plus algébrique.

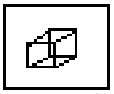
Cette icône vous permet de définir un segment simplement en désignant deux points.



Ici aussi, il suffit de désigner deux points. Une droite se différencie graphiquement d'un segment par le fait qu'elle est dessinée d'un bord à l'autre de l'écran.



Pour définir un polygone, vous devrez indiquer d'abord le nombre de sommets dans une boîte de dialogue. Ensuite, vous sélectionnerez ces sommets un à la fois.

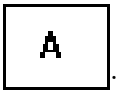
 permet de définir un cube en une seule étape. Pour bien comprendre son fonctionnement, il faut savoir que tout cube construit de cette manière étant de côté unité, sa position est déterminée par celle du sommet dont les coordonnées sont les plus petites, appelé ici le sommet initial. En sélectionnant le point $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme sommet initial, on détermine donc le cube dont les sept autres sommets sont

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \\ c \end{pmatrix}$$

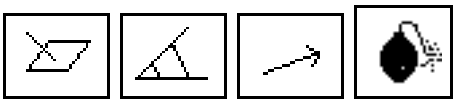
Dès que vous cliquez sur l'icône, le curseur de la souris se transforme en un cube. Déplacez ce cube de manière à l'amener à l'endroit souhaité. Chaque fois que le sommet initial occupe une position connue du logiciel, les coordonnées de cette position apparaissent à l'écran. En cliquant à ce moment du bouton gauche, le cube est créé et fixé à l'emplacement choisi.

A noter que si vous avez choisi le mode de représentation en perspective, le cube-curseur est de taille réduite. Il prendra sa taille normale lorsque vous sélectionnerez un sommet.

A.4.2 L'icône de dénomination

Cette icône est  . Elle permet de marquer un point d'une lettre. Après que vous ayez cliqué sur l'icône, le programme vous demandera de sélectionner un point et d'introduire son nom (deux lettres maximum) dans une boîte de dialogue.

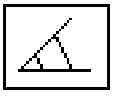
A.4.3 Les icônes d'exécution



Ces icônes vous permettent de construire l'image d'un objet par une transformation, ou de détruire un objet. Les quatre actions possibles sont :

1. appliquer à l'objet choisi le projecteur défini à l'aide du menu Projection,
2. appliquer à l'objet choisi l'homothétie définie à l'aide du menu Homothétie,
3. appliquer à l'objet choisi la translation définie à l'aide du menu Translation,
4. détruire l'objet choisi.

Elles fonctionnent de façon analogue. Supposons par exemple que vous vouliez construire l'image d'un polygone par une homothétie. Il faut que le polygone et l'homothétie aient été définis au préalable. Si c'est le cas :

1. Cliquez sur l'icône 
2. Un message apparaît vous demandant à quel type d'objet vous voulez appliquer l'homothétie définie en dernier lieu. (Si aucune homothétie n'a été définie, rien ne se passe.)
3. Cliquez sur l'icône
4. Un nouveau message vous demande de choisir le polygone, ce que vous ferez à l'aide de la souris. Chaque fois que celle-ci pointera avec précision sur le premier point ayant servi à définir un polygone, celui-ci clignotera. C'est à ce moment que vous pouvez le sélectionner, simplement en pressant le bouton gauche de la souris. L'homothétie lui est alors appliquée.

Insistons sur le fait que dans la dernière étape, c'est nécessairement sur le premier point ayant servi à définir le polygone que vous devez pointer la souris pour que le polygone soit sélectionnable. Si vous avez oublié quel est ce premier sommet, il vous reste à les essayer tous, les uns après les autres. Plus gênante serait la situation si vous aviez défini plusieurs polygones ayant le même premier sommet. Dans ce cas, seul le premier introduit de ces polygones serait accessible à une quelconque transformation. Il ne devrait pas être trop difficile d'éviter une telle situation.

Nous avons ainsi effectué une rapide présentation technique du logiciel. A vous de jouer !

Annexe B

Les sections de cube

B.1 Introduction 244
B.2 La méthode synthétique 245
B.3 Une méthode basée sur le réseau cubique 247
B.4 Une méthode vectorielle 249
B.5 Une conclusion ? 251

B.1. Introduction

Construire la section d'un cube par un plan déterminé par trois points situés sur les faces du cube est une des activités rencontrées normalement dans un cours de géométrie de l'espace. Elle permet d'illustrer et d'utiliser les propriétés d'incidence et de parallélisme. Elle nécessite un enchaînement rigoureux de ces propriétés ainsi qu'une bonne vision spatiale. A travers cette activité, ce sont à la fois des compétences d'analyse et de synthèse qui sont mises en jeu.

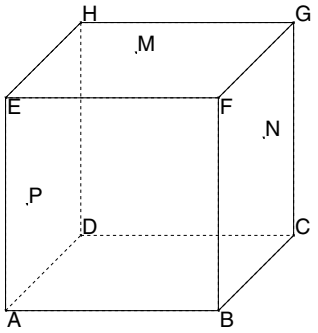
Notre propos dans cette annexe est de montrer comment la construction d'une section d'un cube peut être réalisée à l'aide du logiciel `reseau.exe`. Nous indiquerons trois méthodes différentes. La première est générale et très proche de la méthode traditionnelle. La deuxième utilise de façon plus systématique les propriétés d'un réseau cubique. Elle s'applique essentiellement lorsque parmi les trois points définissant le plan de section, certains sont dans une même face. La troisième méthode fait intervenir de façon explicite et intensive le calcul vectoriel.

Selon la position des points sur les faces du cube, la section est plus ou moins facile à construire. Nous ne chercherons pas à traiter tous les cas possibles, laissant à l'utilisateur le plaisir de la découverte.

Nous considérerons donc un cube $ABCDEFGH$ et trois points M, N et P.

B.2. La méthode synthétique

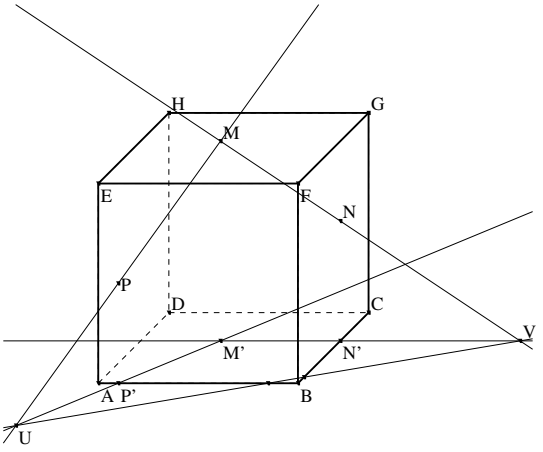
Si les points M, N, P occupent des positions particulières, sur les arêtes par exemple, il est souvent possible de déterminer la section par une méthode plus simple que celle qui va être décrite. Plaçons-nous dans le cas général où les points M, N et P sont situés dans des faces différentes et non sur des arêtes. Par exemple, $M \in EFGH$, $N \in BCGF$ et $P \in ABFE$.



La méthode consiste à déterminer l'intersection du plan MNP et du plan de l'une des faces. On choisit souvent la face $ABCD$.
Pour trouver les points de percée des droites MN et MP dans le plan de la face $ABCD$, on détermine d'abord les projections orthogonales. M', N' et P' de M, N et P sur $ABCD$.

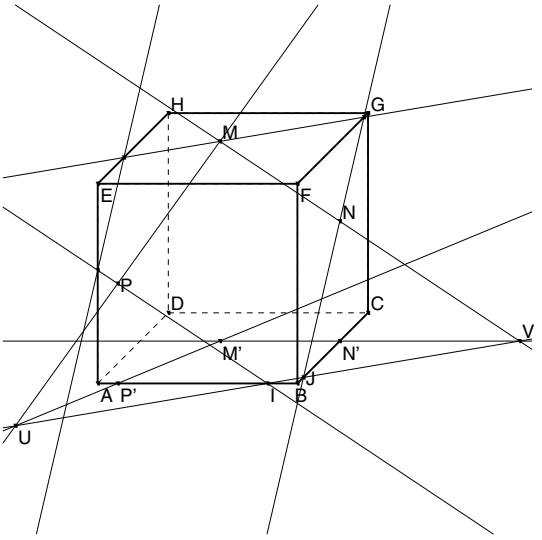
Le logiciel permet de construire M', N' et P' en définissant le projecteur $\text{proj}_{ABC}^{//EA}$ et en l'appliquant aux points M, N, P. On peut aussi définir successivement les trois translations de vecteurs $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{EP}$, les appliquer au segment EA, construisant ainsi des segments MM', NN'' et PP''. Le point N' est alors l'intersection de NN'' et BC, cependant que P' est l'intersection de PP'' et AB.

L'intersection des plans MNP et $ABCD$ est la droite UV, où $\{U\} = MP \cap M'P'$ et $\{V\} = MN \cap M'N'$.



Tous les points définis en tant qu'intersection de deux droites ou de deux segments ont été construits automatiquement par le logiciel, mais non renforcés à l'écran. Ils sont néanmoins disponibles pour définir de nouvelles droites ou segments. Si on veut les renforcer, il suffit de positionner le pointeur de la souris sur le point visé et de cliquer (une fois) du bouton droit.

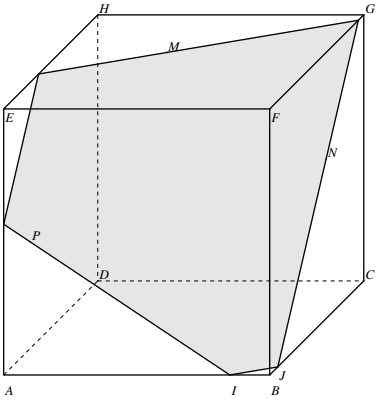
Après que la droite UV ait été déterminée, la section se construit de proche en proche. Dans le cas de la figure, UV coupe les arêtes AB et BC en I et J. On peut par conséquent dessiner les droites IP, intersection du plan MNP avec la face $ABFE$, et JN, intersection de MNP avec $BCGF$.



Comme JN coupe l'arête $[FG]$, on a un deuxième point de l'intersection de MNP avec $EFGH$, ce qui permet de terminer la section.

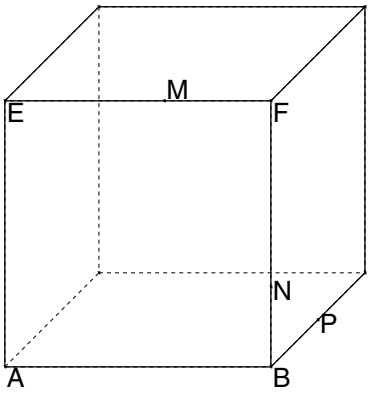
Dans certains cas, il serait nécessaire de tracer une droite parallèle à une droite déjà tracée. Il suffirait pour ce faire, de définir une translation appliquant la seconde droite sur la première, et d'exécuter cette translation.

Il reste enfin à redessiner la section en tant que polygone et effacer les éléments devenus inutiles.

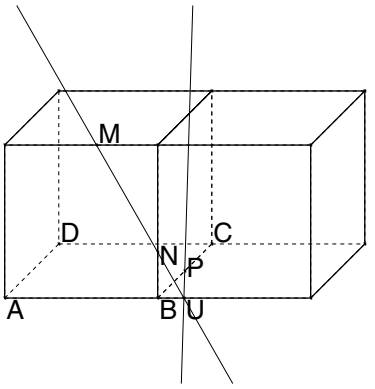


B.3. Une méthode basée sur le réseau cubique

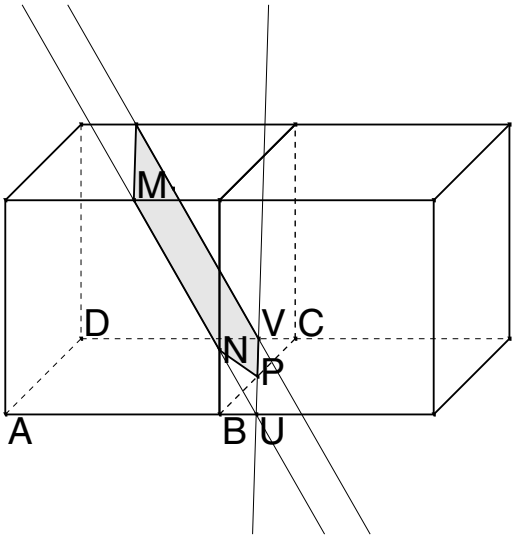
Cette méthode est moins générale car elle suppose que les points M, N et P sont situés sur des arêtes, ou tout au moins que certains des segments $[MN]$, $[NP]$ et $[MP]$ sont sur les faces du cube.

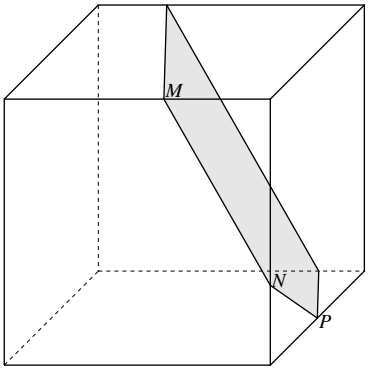


Par exemple, si le segment $[MN]$ est situé sur la face $ABFE$, il est possible de trouver l'intersection de la droite MN avec les côtés de cette face, simplement en prolongeant éventuellement ces côtés. Et de tels prolongements sont facilement réalisés en construisant un (ou des) cube(s) adjacent(s) au premier, ce qui fournit de plus un support visuel appréciable.



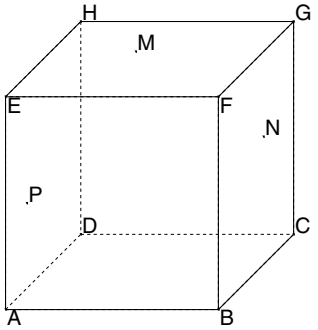
Les droites MN et AB se coupent en le point U. La droite UP est alors l'intersection des plans MNP et $ABCD$. Elle coupe le côté CD en V. Il reste à tracer (par translation) la parallèle à MN passant par V, et à terminer le dessin.


M
D
V
C
N
P
A
B
U


M
N
P

B.4. Une méthode vectorielle

La méthode utilisée par le logiciel `reseau.exe` pour définir un point a pour conséquence que, à tout moment, les coordonnées de tout point sont accessibles à l'utilisateur, et que ces coordonnées sont généralement assez simples.



Nous reprendrons ci-dessous la situation du premier paragraphe. Il est alors possible de déterminer directement par exemple le point de percée V de la droite MN dans le plan $ABCD$ sans aucune construction, mais à l'aide d'un calcul préalable. Il nous suffit de trouver l'abscisse de V sur la droite MN par rapport au repère (M, N).

Autrement dit, nous devons trouver le rapport $\dfrac{\overrightarrow{MV}}{\overrightarrow{MN}}$. Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overrightarrow{MV}}{\overrightarrow{NV}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overrightarrow{NN'}}$$

La hauteur de M étant 1, nous n'avons besoin que de la hauteur de N. Notons la z_n. Nous obtenons ainsi

$$\overrightarrow{MV} = \frac{1}{z_n}\overrightarrow{NV} = \frac{1}{z_n}(\overrightarrow{MV} - \overrightarrow{MN})$$

On en déduit finalement

$$\overrightarrow{MV} = \frac{1}{1 - z_n}\overrightarrow{MN}$$

Le point V s'obtient donc directement à l'aide de la routine de définition d'un point, sans devoir construire M' ni N', et *a fortiori* sans devoir tracer les droites MN et $M'N'$.

Le résultat ci-dessus aurait aussi pu être obtenu directement en utilisant l'équation vectorielle de la droite MN : si nous appelons ℓ l'abscisse de V par rapport au repère (M, N), nous avons

$$V = M + \ell(N - M)$$

Par conséquent

$$0 = 1 + \ell(z_n - 1)$$

Cette technique permet de déterminer sans difficultés les différents points d'intersection qui interviennent dans la méthode synthétique.

Nous pouvons aussi exploiter jusqu'au bout l'idée vectorielle et chercher directement le point de percée de la droite CG dans le plan MNP. Nous sommes ainsi amenés à utiliser les techniques développées dans le thème B, en écrivant l'équation vectorielle

$$C + h(G - C) = M + \ell(N - M) + m(P - M)$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x_n - x_m \\ 1 - y_m \\ z_n - 1 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 1 - x_m \\ y_p - y_m \\ z_p - 1 \end{pmatrix}$$

D'où le système

$$\begin{aligned} 0 &= x_m + k(x_n - x_m) + \ell(1 - x_m) \\ 1 &= y_m + k(1 - y_m) + \ell(y_p - y_m) \\ h &= 1 + k(z_n - 1) + \ell(z_p - 1) \end{aligned}$$

Les deux premières équations fournissent les valeurs de k et ℓ. En remplaçant dans la troisième équation, on obtient l'abscisse h du point de percée de CG dans le plan de la section. Si h est compris entre 0 et 1, le point appartient à l'arête CG, en le joignant à N, on trouve l'un des côtés de la section. Sinon on cherche de la même manière le point de percée d'une autre arête de la face $CDHG$ dans le plan MNP. On procède de la même façon avec les autres faces.

B.5. Une conclusion ?

Les deux premières méthodes qui viennent d'être décrites ont l'avantage d'être plus visuelles, plus géométriques. La seconde n'est pas tout à fait générale, mais est suffisante pour les cas traités le plus souvent dans les classes. Ces deux méthodes ont les inconvénients qui correspondent à leurs avantages : elles ne sont guère généralisables à des polyèdres plus compliqués qu'un cube ou un tétraèdre. Elles sont par là-même moins puissantes que la méthode vectorielle. C'est toute la différence entre géométrie synthétique et géométrie analytique.

Conformément à la philosophie développée dans l'introduction de ce fascicule, nous préconisons de munir les élèves de plusieurs méthodes différentes d'attaque d'un problème, de manière à ce qu'ils puissent choisir celle qui convient le mieux à la situation particulière qu'ils ont à traiter. C'est dans cet esprit que nous pensons que les trois méthodes décrites ci-dessus pourraient être rencontrées à travers le logiciel `reseau.exe`.

Annexe C

Bibliographie commentée

C.1 A.Kostrikin : Introduction à l'algèbre 254
C.2 N.Kuiper : Linear Algebra and Geometry 256
C.3 T.Banchoff, J.Wermer : Linear Algebra through Geometry 258
C.4 F.Pham et H.Dillinger : Algèbre linéaire 261
C.5 Paul R.Halmos : Finite-dimensional vector spaces 262

Avertissement

Les références précises des ouvrages mentionnés dans cette annexe se trouvent dans la bibliographie située à la fin du fascicule.

C.1. A.Kostrikin : Introduction à l'algèbre

Dans cet ouvrage très généraliste, trois chapitres nous intéressent plus particulièrement.

Le premier d'entre eux, *la génèse de l'algèbre*, nous parle de transformations de systèmes d'équations linéaires en systèmes équivalents avant de parler des déterminants (sur lesquels on peut faire les mêmes transformations).

Puis, toujours sur de tels systèmes, Kostrikin introduit la méthode de réduction à la forme « en échelon » (ou « quasi-triangulaire »).

Sous cette forme, un système sera dit *compatible* dès qu'il ne contient pas d'équation de la forme $b_t = 0$ (avec un b_t par ailleurs non-nul).

On explique en fait la méthode d'élimination des inconnues de Gauss, que l'on reprend par après de façon plus formelle en passant par des déterminants d'ordre peu élevés.

Le déterminant 2×2 est introduit sans réelle motivation. Cependant, Kostrikin présente de manière simple la méthode de Cramer pour le cas 2×2, puis la généralise au cas 3×3.

La façon d'introduire le déterminant 3×3 est pratique, mais il n'y a pas de vraie justification des valeurs données aux déterminants C_1, C_2 et C_3 de la méthode de Cramer :

On sait que $\frac{-C_1}{C_3} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}$ et $\frac{-C_2}{C_3} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{21} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}$ de là, on pose

$$\begin{cases} C_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\ C_2 = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} \\ C_3 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \end{cases}$$

où le coefficient a_{ij} est au croisement de la i^e ligne et de la j^e colonne de la matrice considérée.

Mais on ne parle pas du développement selon une ligne ou une colonne !

Le deuxième chapitre traite des espaces vectoriels.

Pour commencer, Kostrikin y introduit les combinaisons linéaires, sans motivation particulière. Puis, la dépendance et l'indépendance linéaires sont présentées avant d'en arriver à la notion de dimension et de base.

On ne parle pas de partie génératrice. En lieu et place, on dit que « l'enveloppe linéaire » (ce qui est engendré par la partie considérée) coïncide avec l'espace vectoriel.

Le lien est ensuite fait entre le rang d'une matrice et les inconnues principales dans un système d'équations linéaires.

Remarquons que ce n'est que bien longtemps après avoir vu les matrices que l'on définit les applications linéaires. (Cette façon de faire n'est peut-être pas la plus appropriée quant à la sinification des notions.)

Cependant, le produit matriciel est vu parallèlement à la composition de deux applications linéaires, de même pour les matrices inverses. Kostrikin en profite pour montrer la non-commutativité du produit matriciel.

Ce chapitre se termine par l'étude de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène (dimension de $ker\phi$, etc...).

La définition du déterminant est raffinée peu à peu dans le troisième chapitre. On utilise la récurrence pour construire les déterminants $n \times n$, la définition finale étant celle donnée par les trois propriétés suivantes :

- $\det A$ est une fonction multilinéaire des lignes de la matrice A,
- $\det A$ est une fonction symétrique gauche des lignes de la matrice A (ce qui signifie que $\det(A_1, ..., A_i, A_{i+1}, ..., A_n) = -\det(A_1, ..., A_{i+1}, A_i, ..., A_n)$),
- le déterminant de la matrice identité vaut 1.

On y développe le déterminant par rapport à la première colonne, puis on montre que le résultat est semblable avec n'importe quelle ligne ou colonne.

Puis, on étudie les variations du déterminant d'une matrice A lorsqu'on modifie les colonnes et les lignes de A.

Enfin, Kostrikin donne des applications des déterminants (critère de régularité d'une matrice, forme générale de l'inverse d'une matrice, méthode de Cramer, rang d'une matrice...).

C.2. N.Kuiper : Linear Algebra and Geometry

Dans cet ouvrage, le but de Nicolaas Kuiper est de mener le lecteur à la géométrie projective et aux plans non-euclidiens dans le cadre de l'algèbre et de la géométrie.

Il part de la notion de vecteur, puis de rapports sur les figures géométriques avant de définir les combinaisons et applications linéaires (les matrices n'intervenant que bien après). Kuiper donne d'intéressants exercices de rapport de section concernant des figures à deux et à trois dimensions (point d'intersection des médianes d'un triangle, application d'un corollaire du théorème de Ceva, etc...).

Le théorème de Desargues est présenté avec trois preuves différentes (dans des cas différents aussi) faisant intervenir la géométrie avec plus ou moins d'importance, et ce à la suite des théorèmes de Menelaus et de Ceva.

Le birapport de quatre points à pour expression :

$$(abcd) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$$

Kuiper utilise ce rapport avec des fonctions linéaires, et en conclusion en dégage le théorème de Pappus.

Regardons à présent les entiers modulo 5 : $0, 1, 2, 3$ et 4. Sur ces nombres, on peut construire un plan affine fini ayant 25 éléments, chaque point de ce plan étant donné par un couple de coordonnées (ϵ, η).

Dans ce plan, une droite ne peut être obtenue que par les fonctions qui envoient un point sur ϵ ou sur $\eta + k.\epsilon$ (où k est un entier de 0 à 4).

Il n'existe donc que six fonctions de ce type.

Une droite sera par exemple $\eta + \epsilon = 3$, composée des points $(4, 4)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(3, 1)$.

Il introduit plus loin les matrices comme étant des représentations des morphismes d'espaces vectoriels. Les propriétés des matrices (y compris leur multiplication) sont présentées comme des conséquences des propriétés respectives des morphismes.

On parle des quaternions comme un ensemble particulier de matrices de type :

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & \delta \\ \beta & \alpha & -\delta & -\gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où les lettres grecques représentent des réels.

Soient e, i, j et k des matrices 4×4 (e est l'unité) telles que $q = \alpha.e + \beta.i + \gamma.j + \delta.k$, alors on retrouve ce que l'on connait des quaternions.

Une définition équivalente est de parler de l'ensemble des matrices :

$$\begin{pmatrix} A & -C \\ \bar{C} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

Où $A = \alpha.u + \beta.i$ et $C = \gamma.u + \delta.i$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ce n'est qu'après avoir vu les matrices d'un peu plus près que Kuiper les applique à la résolution de systèmes d'équations linéaires. Et il discute des cas où des systèmes ont une solution avant d'introduire les déterminants en tant que rapports de fonctions n-linéaires antisymétriques.

Le problème est que ces fonctions antisymétriques sont présentées de façon générale, et on ne voit le lien avec les morphismes et les matrices que bien longtemps après. Il faudrait plutôt motiver cette matière par l'intérêt de trouver une fonction *déterminant*.

Kuiper utilise ensuite les déterminants sur des problèmes de volumes, notamment de simplexes, et termine leurs applications par la méthode de Cramer.

Puis, on passe au produit scalaire de deux vecteurs après avoir vu la théorie des fonctions quadratiques. Mais on en avait déjà parlé auparavant, le but étant ici de généraliser en sens et en dimension.

Pour finir, Kuiper applique l'algèbre linéaire au monde des statistiques (coefficients de corrélation), parle des vecteurs et valeurs propres d'endomorphismes, et va jusqu'aux formes de Jordan.

Il consacre un chapitre à l'étude des groupes d'isométries et termine avec la représentation en géométrie projective des ellipses, des paraboles et des hyperboles.

C.3. T.Banchoff, J.Wermer : Linear Algebra through Geometry

Comme son titre l'indique, cet ouvrage entraine le lecteur dans le monde de l'algèbre linéaire grâce à de forts soutiens de géométrie, d'abord à une, puis deux et surtout trois dimensions, le but étant d'en arriver à de la géométrie vectorielle à n dimensions.

Au fil de l'ouvrage, la matière progresse par des exercices et des questions posées aux élèves.

Toute une théorie s'établit tout d'abord à deux dimensions, et est décalquée par après à trois dimensions.

Dès le départ, les auteurs introduisent une notion de base dans un repère, mais en la *parachutant* de manière peu convaincante.

Puis, ils donnent le produit scalaire usuel, sans définir *un* produit scalaire par ses propriétés (mais au niveau du secondaire, il est peu utile d'en connaître d'autres). Cependant, une interprétation géométrique de ce produit scalaire par les coordonnées polaires est développée plus loin.

On définit des distances en partant de la géométrie mais en se basant sur l'algèbre linéaire, et en suivant une utilisation très logique des vecteurs qui mène, juste après, à la résolution de systèmes de deux équations linéaires homogènes à deux inconnues.

Les coordonnées polaires servent à nouveau, cette fois pour introduire une idée sous-jacente de matrice dans les rotations.

Remarquons que cette idée n'est vraiment exploitée que quelques pages plus loin, où l'on reprend des exemples de transformations du plan vus précédemment (projection, symétrie, rotation, homothétie) pour en tirer côte à côte les définitions des applications linéaires et des matrices.

Signalons que les applications linéaires ne sont pas définies par les deux propriétés classiques, mais sont données comme étant des transformations du plans pouvant s'écrire sous la forme d'un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x' = a.x + b.y \\ y' = c.x + d.y \end{cases}$$

Les matrices sont vues d'emblée comme des *symboles* pour représenter des applications linéaires. L'application ci-dessus sera donc représentée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Remarquons que de ce fait, le produit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

coule de source, et c'est un premier pas vers le produit matriciel généralisé. Des matrices, on tire aisément les deux propriétés habituelles des applications linéaires (toujours ici à deux dimensions).

L'idée de déterminant 2×2 est introduite par la proposition suivante :

Soit A une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le seul vecteur X tel que $A(X) = \binom{0}{0}$ est $X = \binom{0}{0}$ si et seulement si $a.d - b.c \neq 0$.

Mais ce n'est qu'après avoir résolu des systèmes d'équations linéaires et des matrices inverses que l'on parlera vraiment de déterminants. Malheureusement, leur définition reste $a.d-b.c$. Cependant, les auteurs restent dans la géométrie, puisqu'ils lient ces déterminants 2×2 à la notion de deux vecteurs orientés positivement ou négativement.

On peut alors faire le lien entre un déterminant et l'aire d'un parallélogramme.

Les isométries sont définies comme des transformations du plan qui préservent la longueur, et elles sont vues à la suite d'exercices sur des transformations qui préservent l'orientation.

On explique alors la diagonalisation d'une matrice 2×2 afin de parler de vecteurs et valeurs propres, et d'aboutir aux coniques (en passant par les quadriques).

C'est là que s'arrête la partie concernant la géométrie à deux dimensions. Les auteurs vont ensuite reprendre les mêmes notions dans le même ordre, mais en passant à trois dimensions.

Les déterminants 3×3 sont vus en conséquence du produit vectoriel. Le déterminant de la matrice :

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

est le nombre $A.(B \times C)$. On voit l'interprétation géométrique du déterminant 3×3, ce dernier étant le volume d'un prisme construit sur les vecteurs lignes de la matrice considérée.

Banchoff et Wermer parlent alors de matrices symétriques avant d'entreprendre une classification des quadriques.

Ils peuvent alors, munis de tout ce matériel, envisager le passage à plus de 3 dimensions en développant la notion d'espace vectoriel.

C.4. F.Pham et H.Dillinger : Algèbre linéaire

L'originalité de cet ouvrage tient dans sa façon d'interpeler le lecteur en attirant son attention sur divers points importants de différents types par une iconographie appropriée située dans la marge.

Les notions fondamentales, les passages demandant de la réflexion, les exercices permettant de progresser, les notes historiques et d'autres choses encore sont ainsi repérés par de petits dessins facilement reconnaissables, ce qui apporte une aide non négligeable au lecteur afin de s'y retrouver dans la structure de l'ouvrage.

En outre, des exercices bien situés jouent le rôle de tests de niveau pour que le lecteur consciencieux puisse juger de sa progression.

Cette volonté de prendre l'étudiant par la main pour le mener plus loin s'incarne également dans le ton pris par moments par les auteurs dans leur rédaction, n'hésitant pas à manier un certain humour afin de mieux s'ancrer dans la mémoire.

Les auteurs partent de l'étude des systèmes linéaires. Ils y introduisent d'emblée l'écriture matricielle des systèmes d'équations. Cette écriture est ici justifiée par un côté "pratique". Mais on peut déjà parler de *rang* et de formes linéaires.

Puis, Pham et Dillinger introduisent les espaces vectoriels pour remplacer les mesures de proportions que l'on pourrait faire sur une feuille de papier par des calculs exacts. Toute la panoplie classique de définitions et de propositions est ici mise en branle. On y parle également de géométrie affine. Remarquons que les fonctions linéaires et affines sont définies en parallèle, ce qui aide à la compréhension de la nuance entre ces concepts.

La notion de dualité arrive alors, et les résultats qui en découlent sont ensuite traités dans une version affine. Les auteurs parlent par après du calcul matriciel, en expliquant le "comment", mais en laissant le "pourquoi" au lecteur, en prenant soin de revenir à un cadre géométrique.

Le chapitre suivant nous parle des endomorphismes d'espace vectoriel, depuis un double point de vue géomtrique et matriciel.

L'ouvrage se termine par des annexes abordant les polynômes, la théorie des ensembles, et les structures algébriques.

C.5. Paul R.Halmos : Finite-dimensional vector spaces

Le but de cet ouvrage est de parler des transformations linéaires sur des espaces vectoriels de dimensions finies en utilisant des méthodes générales. Notamment, Halmos ne donnera jamais les coordonnées d'un vecteur.

Le premier chapitre introduit d'emblée la notion d'espace vectoriel, et de ses éléments les vecteurs. Trois exemples représentatifs sont donnés : l'ensemble des complexes, l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, et l'ensembles des n-uples de complexes (jugé plus intéressant par l'auteur).

La relation de dépendance linéaire vient alors, suivie très logiquement par les concepts de base, de dimension et de sous-espace. Avant de parler des espaces duaux, Halmos propose de représenter l'image d'un vecteur par une fonction linéaire par la notation $[x, f]$ au lieu de $f(x)$. La propriété définissant une fonction linéaire s'écrit alors :

$$[a.x_1 + b.x_2, y] = a.[x_1, f] + b.[x_2, f]$$

L'auteur présente ensuite des façons de construire de nouveaux espaces vectoriels à partir de ceux que l'on connait par les sommes directes, les espaces quotients et le produit tensoriel. Puis, il parle de permutations, de cycles, et de formes multilinéaires et alternées.

Le deuxième chapitre aborde les transformations linéaires, présentées comme étant des vecteurs elles aussi. Puis viennent leurs produits, polynômes et inverses, avant d'introduire la notation matricielle.

Halmos donne d'abord une définition générale des matrices et puis seulement montre petit à petit l'utilité considérable qu'elles ont dans la représentation des transformations linéaires.

Le chapitre se poursuit avec le cortège classique des notions qui accompagnent le sujet, jusqu'aux déterminants et à la forme de Jordan.

L'auteur entame alors le chapitre de l'orthogonalité, dans lequel il est bien obligé de donner les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dans un exemple illustrant la notation suivante :

$$\text{Si } X = (x_1, x_2)$$
$$\text{alors on note la distance de X à l'origine } \|X\| = \sqrt{({x_1}^2 + {x_2}^2)}.$$

De là, le produit scalaire est défini, tout d'abord dans $\mathbb{R}^2$, puis dans les complexes, et enfin en général. Halmos peut ainsi parler d'orthogonalité qu'il développe jusqu'au théorème spectral.

Le livre se termine sur un court chapitre traitant d'analyse dans lequel l'auteur tente d'intéresser le lecteur à des problèmes de convergence dans des espaces vectoriels munis de produits scalaires.

En prenant dans un espace vectoriel quelconque (muni d'un produit scalaire) un vecteur x et une suite de vecteurs (x_n) Halmos définit la convergence de deux façons :

- $\|x_n - x\| \to 0$ quand $n \to \infty$
- $(x_n - x, y) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout y fixé dans l'espace vectoriel considéré.

La notation (x, y) désigne le produit scalaire de l'espace considéré. Cette notation peut, avec prudence pour les complexes conjugués, prendre la place de la notation $[x, f]$ (car a toute fonction linéaire f sur l'espace considéré correspond un unique vecteur y tel que $(x, y) = [x, f]$ pour tout x).

Dans ce dernier chapitre, l'auteur aborde pour finir le théorème ergodique et les séries de puissances.

Remarquons que Paul R.Halmos propose au lecteur, à l'instar de ce que Serge Lang fit par après, des exercices à la fin de chaque partie représentative de l'ouvrage.

Annexe D

Le concept de vecteur

D.1 Introduction 265
D.2 Quelques présentations du concept de vecteur 266
D.2.1 H.S.M.Coxeter 1961 267
D.2.2 N.Kuiper 1962 268
D.2.3 J.Dieudonné 1964 269
D.2.4 R.M.Hochtrasser 1965 270
D.2.5 G.Papy 1968 271
D.2.6 K.Borsuk 1969 272
D.2.7 S.Lang 1971 273
D.2.8 T.J.Fletcher 1972 274
D.2.9 T.Banchoff et J.Wermer 1992 275
D.3 Conclusion 276

D.1. Introduction

Le concept de vecteur pose un grand problème dans l'enseignement des mathématiques. Bien souvent rencontré au départ par les élèves en tant qu'objet de la physique caractérisé par une direction, un sens, une grandeur et un point d'application, il est délicat de faire évoluer cet archange indomptable vers la notion d'élément d'un espace vectoriel quelconque.

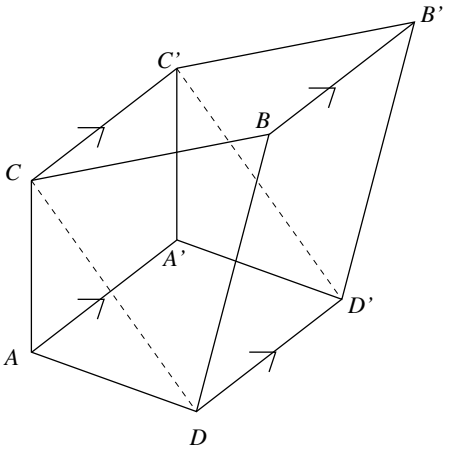
L'ouvrage de M.J.Crowe, [17], montre par ailleurs à quel point ces idées ont évolué avant d'aboutir aux concepts actuels.

Dans les pages qui suivent, nous allons présenter le concept de vecteur tel que l'entendent divers auteurs rencontrés dans la bibliographie de l'algèbre linéaire. Ces diverses visions sont classées chronologiquement. Les références des ouvrages d'où elles sont tirées se trouvent dans la bibliographie.

D.2. Quelques présentations du concept de vecteur

D.2.1 H.S.M.Coxeter 1961

La transition d'un groupe multiplicatif à un groupe additif correspondant est la base de la théorie des logarithmes.
En dehors du domaine de l'arithmétique, le choix entre multiplication et addition est souvent une simple question de notation.
En particulier, le groupe *multiplicatif* abélien des translations devient le groupe *additif* des vecteurs.



Remarque : deux points quelconques A et A' déterminent une unique translation $A \longrightarrow A'$ (si $A = A'$, on a alors l'identité).

Si $AA'B'B$ est un parallélogramme, ou si pour tout parallélogramme $AA'C'C$ basé sur AA', il y a un autre parallélogramme $C'CBB'$, la translation $B \longrightarrow B'$ est la même que la translation $A \longrightarrow A'$.

Une translation est spécifiée par l'effet qu'elle a sur un point donné.

Dans le dessin ci-dessus, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. De plus, on sait que le produit (composition) des translations $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow C$ est la translation $A \longrightarrow C$.

Ceci nous assure que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

De plus, on sait que la composition des translations est commutative, donc pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ on a $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

D.2.2 N.Kuiper 1962

L'auteur considère le plan « ordinaire » dans lequel on fixe une origine. Puis, il considère toutes les flèches issues de cette origine dans le plan.

Une flèche est caractérisée par ses extrémités (c'est donc un couple ordonné de points). On appelle *vecteur* une flèche ayant l'origine comme point initial.

Il y a une bijection entre les vecteurs et les points du plan. Les flèches parallèles à celles qui partent de l'origine représentent aussi des vecteurs.

Kuiper introduit alors la somme et la multiplication scalaire comme des conventions à respecter.

D.2.3 J.Dieudonné 1964

Le vecteur est introduit comme étant un élément d'un espace vectoriel (donné comme étant un ensemble vérifiant huit axiomes bien connus). Cette façon de voir les choses est assez classique, mais n'aide pas toujours l'étudiant. Citons la Commission Romande de Mathématique qui dans son *Fundamentum d'Algèbre Linéaire* prône également cette définition du concept de vecteur. Paul R.Halmos donne lui aussi une définition semblable.

D.2.4 R.M.Hochtrasser 1965

Le but de Hochtrasser n'est pas d'introduire la notion de vecteur, mais de faire des rappels et développements de parties de l'algèbre des matrices.

Considérons une rotation dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x' = x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0.z \\ y' = -x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0.z \\ z' = 0.x + 0.y + z \end{cases}$$

Sa matrice est :

$$R(\theta, OZ) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système devient $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\theta,\ OZ) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Les matrices colonnes de cette dernière équation sont appelées *vecteurs*.

$R(\theta, OZ)$ est donc un opérateur capable de faire tourner un vecteur d'un angle θ autour de l'axe OZ.

D.2.5 G.Papy 1968

Papy introduit tout d'abord la notion de couples équipollents dans le plan (deux couples sont équipollents lorsqu'ils sont reliés par un parallélogramme ou deux).

Propriétés de l'équipollence : réflexivité, symétrie et transitivité (cette dernière en axiome).

L'équipollence est donc une relation d'équivalence.

Puis, l'auteur introduit les translations comme étant des classes de couples équipollents (exemple : la translation $\overrightarrow{ab}$ est l'ensemble des couples équipollents à (a, b)).

Grâce à la loi de composition, les translations forment un groupe multiplicatif. Si on prend le signe « + » pour loi, alors on appelle *vecteurs* les translations.

Papy propose même un dictionnaire des synonymes pour passer de l'un à l'autre.

D.2.6 K.Borsuk 1969

Borsuk considère les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ qu'il appelle *espaces cartésiens* et qu'il note C_n avec $n = 1, 2, 3$. Dans ces espaces, il prend une paire de points p et q, et il appelle leur paire *ordonnée* $\overrightarrow{pq}$ un vecteur d'origine p et de fin q. Les coordonnéss de ce vecteur sont celles de q auxquelles ont soustrait celles de p.

Borsuk dit que deux vecteurs $\overrightarrow{pq}$ et $\overrightarrow{rs}$ sont égaux si le centre de la paire ps est le même que celui de la paire qr, ce à quoi il attribue le caractère géométrique de la relation d'égalité vectorielle. Soumis à une isométrie f de C_n, deux vecteurs $\overrightarrow{pq}$ et $\overrightarrow{rs}$ égaux restent des vecteurs égaux $\overrightarrow{f(p)f(q)}$ et $\overrightarrow{f(r)f(s)}$.

Cette condition d'égalité revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont égales. Cette relation d'équivalence permet de former des classes de vecteurs, que Borsuk nomme *vecteurs libres* ou encore *vecteurs*.

Il appelle *verseur* un vecteur de norme 1 et *zero* le vecteur nul.

D.2.7 S.Lang 1971

Serge Lang est devenu à l'usage une référence classique.

Le premier chapitre de son « Algèbre linéaire » est consacré aux vecteurs. Il commence par situer le lecteur dans un espace de dimension n, mais revient bien vite à la dimension 2 pour plus de facilité. C'est dans ce cadre qu'il donne une première définition du vecteur *lié* comme étant un couple de points, représenté par une flèche entre les deux points.

Deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ seront *équivalents* si $B - A = D - C$ (il s'agit ici d'addition de coordonnées de points).

Cette équation représente un système ayant autant d'équations qu'il y a de dimensions, en l'occurrence deux.

On appellera *vecteur* un vecteur lié à l'origine du repère choisi (tout vecteur lié est équivalent à un vecteur).

Un n-uple de nombres représentera donc dans un espace à n dimensions soit un point, soit un vecteur selon le contexte.

Puis, Serge Lang donne une définition axiomatique des espaces vectoriels et dit en général que les éléments de tels espaces sont également appelés *vecteurs*.

D.2.8 T.J.Fletcher 1972

L'auteur introduit dès le départ à l'aide d'exemples une notion générale de ce qu'il appelle un « *vectoriel* » (par exemple : les progressions arithmétiques).

Puis, Fletcher donne deux lois de composition : l'addition terme à terme et la multiplication par un scalaire.

Il dit qu'un ensemble fermé pour ces deux lois est appelé un vectoriel, et que les éléments d'une telle structure sont appelés des *vecteurs*.

Grâce à ces deux lois, l'idée de combinaison linéaire (et de base) est dégagée.

D.2.9 T.Banchoff et J.Wermer 1992

Les auteurs commencent par définir la notion de vecteur sur une droite comme étant un *segment orienté* allant d'une origine fixée jusqu'à un point de la droite (donné par sa coordonnée).

Ce sont donc des vecteurs liés. On introduit alors leurs somme et produit scalaire, puis on passe au plan.

Dans le plan, un vecteur est un couple de nombres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ écrit en colonne, où x et y sont les coordonnées d'un point.

Le vecteur est la flèche, ou le segment orienté, allant de l'origine du plan à ce point.

Le même cheminement est appliqué pour 3 dimensions et plus.

D.3. Conclusion

Certaines des visions ci-dessus peuvent être classées par catégories, mais il est clair qu'il y a à peu près autant de façons différentes de concevoir le vecteur que d'auteurs traitant du sujet.

Un tel constat met en évidence le fait que ce concept est loin d'être facile à aborder au niveau des élèves.

De plus, la lecture des divers points de vues que nous venons de faire montre aussi la nécessité de coordonner les nombreuses définitions ou registres de représentation de cette notion, notamment à l'aide d'exercices de conversion.

[1] Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Premier degré de l'enseignement secondaire, *Programme de mathématiques*, 7/5609, (1995). 2

[2] Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Deuxième degré de l'enseignement secondaire (3è année), *Programme provisoire de mathématiques*, 7/5721, (1996). 3

[3] Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Commission pluraliste des programmes de mathématiques pour l'enseignement secondaire de transition, *Vue générale de la matière aux deuxième et troisième degré*, (1996). 3

[4] CREM, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, (1995). 2

[5] ICMI, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, Discussion document for an ICMI study*, L'enseignement mathématique, 40, 345-357, (1994). 14

[6] N.C.T.M., *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, (1989). 17

[7] Commission du dictionnaire de l'APMEP, *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*, (1967-1975). 25

[8] S.B.P.M.ef, *Produit scalaire, matrices et applications*, Dossier d'exploration didactique n°5, 89 pages, (1997). 87

[9] H. Anton and C. Rorres, *Elementary linear algebra with applications*, John Wiley, New-York, (1987).

[10] T. Banchoff and J. Wermer, *Linear algebra through geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag, New-York, (1992).

[11] M. Barnabei, A. Brini and G.-C. Rota, *On the exterior calculus of invariant theory*, J. Algebra, 96, 1220-160, (1985).

[12] R. Bkouche, *De l' enseignement de la géométrie*, Colloque International sur l'Enseignement de la Géométrie, Université de l'Etat à Mons, 33-44, (1982). 15

[13] K. Borsuk, *Multidimensional analytic geometry*, Polish Scientific Publishers, Warszawa (Poland), (1969)

[14] N. Bourbaki, *Algèbre, Ch. 1-3, 4-5, 6-7, 8, 9*, Hermann, Paris, (1958-1970).

[15] N. Bourbaki, *Notes historiques. Algèbre, Ch. 1-3, 4-5, 6-7, 8, 9*, Hermann, Paris, (1958-1970).

[16] H. S. M. Coxeter, Introduction to geometry, J. Wiley & Sons Inc., New York (USA), (1961).

[17] M. Crowe, *A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system*, Univ. Notre-Dame Press, Notre-Dame, (1967). 265

[18] A. Dalle, C. De Waele, *Géométrie dans l'espace, avec compléments*, Maison d'éditions A. Wesmael-Charlier, Namur ; 27ème édition, (1968).

[19] J. Dhombres et P. Radelet-Degrave, *Contingence et nécessité en mécanique. Etude de deux textes inédits de Jean d'Alembert*, Physis, vol. XXVIII , 35-114, (1991).

[20] J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3ème édition, Hermann, Paris, (1964).

[21] J. Dieudonné, P. Dugac, W. J. F. Ellison, J. Guerindon, ..., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900* , Hermann, Paris, (1986).

[22] H. Dillinger et F. Pham, *Algèbre linéaire*, Diderot Ed., Paris, (1996).

[23] J.-L. Dorier, *Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire*, Cahier de Didirem n°6, IREM de Paris VII, (1990). 4

[24] J.-L. Dorier, *Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire*, Cahier de DIDIREM 7 ; Université de Paris V II, juin 1990. 4

[25] J.-L. Dorier, *Premières approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'Université*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ,IREM de Strasbourg ; vol. 5, 95-123, (1993). 4

[26] J.-L. Dorier et des contributions d'autres auteurs, *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage, France, (1997).

[27] P. *Du Val, Homographies, quaternions and rotations*, Clarendon Press, Oxford, (1964).

[28] Hans Freudenthal, *Mathematics as an educational task, Reidel*, (1973). 8, 17

[29] L. Gurova, *The influence of a visual aid on the process of solving spatial problems*, Soviet studies in the psychology of lea rning and teaching mathematics, Vol. IV, 137-147, J. Kilpatrick and I. Wirszup editors, School mathematics study group, Stanford University and Survey of recent east european mathematical literature, University of Chicago, (1970). 16

[30] P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces 2nd ed*, D. Van Nostrand company, Princeton (USA), (1958).

[31] R. M. Hochtrasser, *Molecular aspects of symmetry*, W. A. Benjamin Inc., New York (USA), (1966).

[32] W. V. D. Hodge and D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Vol. I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1994).

[33] A. Kostrikin, *Introduction à l'algèbre*, Mir, Moscou, (1977-1981).

[34] N. H. Kuiper, *Linear algebra and geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1962).

[35] S. Lang, *Algèbre linéaire*, 2 tomes, InterEditions, Paris, (1976).

[36] G. Lupsin et R. Graas, *Trigonométrie sphérique*, La Procure, Namur-Bruxelles, 8ème édition, (1971).

[37] R. S. Millman, *Kleinian transformation geometry*, Amer. Math. Monthly, 84, 338-349, (1977).

[38] G. Noël, *Géométrie de l'espace, des axiomes d'incidence au produit vectoriel et à l'orientation*, Notes de cours, UMH, (1986).

[39] G. Papy *Mathématique moderne*, 6 Tomes, éd. Marcel Didier, (1968).

[40] K. Pavlopoulou, *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, (1994). 4

[41] K. Pavlopoulou, *Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg , vol. 5, 67-93, (1993). 4

[42] F. Pourbaix, *De la cinquième année du secondaire aux premières candidatures scientifiques, traces de l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, (1996).

[43] Y. et R. Sortais, *Géométrie de l'espace et du plan*, Hermann, Paris, (1988).

[44] P. Tilleuil, *Bivecteur, produit vectoriel, volume, déterminant, ...*, Centre de Didactique des Sciences, Université de Mons-Hainaut, (mars 1997). 164

[45] P. Tilleuil, *Quaternions et rotations de l'espace*, Centre de Didactique des Sciences, Université de Mons-Hainaut, (mars 1997).

[46] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, Paris, (1988).

[47] B. L. Van Der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1983).

[48] B. L. Van Der Waerden, *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985).

[49] D. van Hiele-Geldof, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de Doctorat, Université d'Utrecht, (1957). 24

[50] P. Van Muylen, *Applications d'algèbre linéaire*, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, (1995).

[51] M. Vilers, *L'algèbre linéaire par des applications interdisciplinaires*, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, (1995).